IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI (FEM)

Un'altra tecnica numerica, la cui formulazione può derivare sia dal metodo dei residui pesati che dalla minimizzazione di un funzionale, è il FEM. Per risolvere con il FEM il problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & in\Omega \\ \varphi = \overline{\varphi} & su\Gamma_1 \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \overline{q} & su\Gamma_2 \end{cases}$$

dove, per semplicità supponiamo $\overline{q} = 0$;
il punto di partenza è costituito dalla relazione:

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Gamma_2} w\overline{q} d\Gamma = 0 \qquad (*)$$

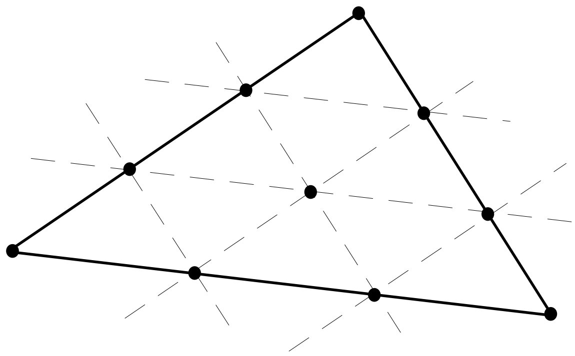
ottenuta con il metodo dei residui pesati, oppure dall'equivalente variazionale:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\Omega \qquad (**)$$

in cui bisogna rendere stazionario il funzionale.

Il dominio Ω viene diviso in un numero finito N_E di elementi. Gli elementi sono in genere triangoli o quadrilateri in due dimensioni e tetraedri o parallelepipedi in tre dimensioni. Gli elementi poligonali più semplici (triangoli e tetraedri) che possono essere utilizzati per discretizzare il dominio d'interesse sono detti simplessi (in generale un simplesso è una figura geometrica che ha N_S+1 vertici dove N_S è il numero di dimensioni dello spazio in cui è definito).

In ogni elemento finito si definiscono N_N nodi (equispaziati all'interno del singolo elemento) come i punti di intersezione delle rette parallele agli spigoli dell'elemento tracciate a partire dagli N_L punti equidistanti in cui è diviso ogni ciascuno spigolo dell'elemento; la figura seguente mostra un triangolo con N_L=3 ed N_N=10:

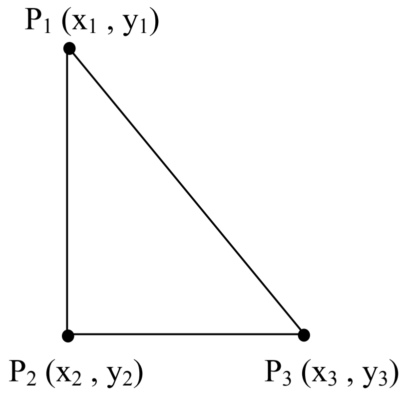


Si può dimostrare che:

$$N_N = \frac{(N_S + N_L)!}{N_S!\,N_L!}$$

Il numero di suddivisioni N_L di un lato o spigolo è detto ordine dell'elemento.

Consideriamo per esempio un triangolo del 1° ordine:



All’interno del triangolo, la funzione $\varphi(x, y)$ può essere approssimata come:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y)\varphi_i$$

dove φ_i sono i valori della funzione $\varphi(x, y)$ nei vertici del triangolo e le funzioni $\alpha_i(x, y)$, dette funzioni di forma o funzioni interpolanti, sono delle funzioni polinomiali (che godono della caratteristica di “completezza”) di grado pari all’ordine del triangolo:

$$\alpha_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$$

ed i coefficienti a_i, b_i, e c_i si calcolano imponendo che la funzione valga 1 nel vertice i-esimo e 0 negli altri; per esempio per la funzione $\alpha_1(x,y)$ bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 1 \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0 \\ a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 = 0 \end{cases}$$

per ottenere:

$$\alpha_1(x,y) = \frac{1}{2A}[(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)]$$

in cui A è la misura del triangolo. Le altre due funzioni di forma si possono ricavare per permutazione dei pedici.

Considerando l'espressione (**) e scegliendo come dominio d'integrazione Ω il triangolo Ω_e si ha:

$$F_e(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varphi_i\left[\int_{\Omega_e}\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j d\Omega_e\right]\varphi_j$$

dove:

$$S_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e}\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j d\Omega_e$$

è il generico elemento della matrice di Dirichlet del triangolo:

$$S_e = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

A titolo di esempio calcoliamo il termine S_{12}:

$$S_{12}^{(e)} = S_{21}^{(e)} = \int_{\Omega_e}\nabla\alpha_1 \cdot \nabla\alpha_2 d\Omega_e = \int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial y}\hat{j}\right)d\Omega_e =$$

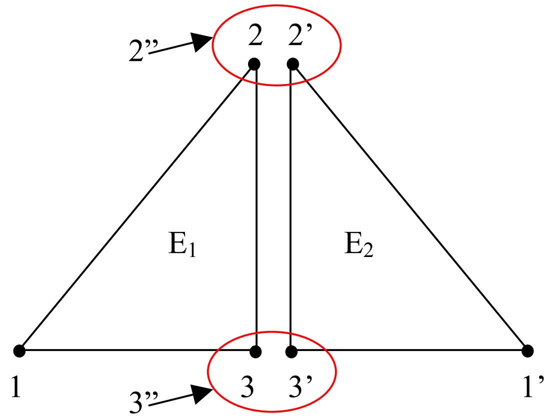
$$= \int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\Omega_e}\left[\frac{1}{2A}(y_2 - y_3)\frac{1}{2A}(y_3 - y_1) + \frac{1}{2A}(x_3 - x_2)\frac{1}{2A}(x_1 - x_3)\right]dxdy =$$

$$= \frac{1}{4A^2}[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]\int_{\Omega_e}dxdy = \frac{1}{4A}[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]$$

Allora nel triangolo possiamo scrivere il funzionale come:

$$F_e(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi_e]^T[S_e][\varphi_e]$$

Consideriamo adesso due triangoli adiacenti:



che uniti formano il triangolo $E=E_1+E_2$ il cui funzionale $F_E=F_{E1}+F_{E2}$ dove:

$$F_{E1}(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi_{E1}]^T[S_{E1}][\varphi_{E1}] \qquad F_{E2}(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi_{E2}]^T[S_{E2}][\varphi_{E2}]$$

con

$$[\varphi_{E1}]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] \qquad [\varphi_{E2}]^T = [\varphi_{1'} \quad \varphi_{2'} \quad \varphi_{3'}]$$

Quindi:

$$F_E(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{[\varphi_{E1}]^T[S_{E1}][\varphi_{E1}] + [\varphi_{E2}]^T[S_{E2}][\varphi_{E2}]\right\} = \frac{1}{2}\left[\varphi_{E1}^T \quad \varphi_{E2}^T\right]\begin{bmatrix} S_{E1} & 0 \\ 0 & S_{E2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{E1} \\ \varphi_{E2} \end{bmatrix}$$

ma d'altra parte si ha anche:

$$F_E(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi_E]^T[S_E][\varphi_E] \quad con \quad [\varphi_E]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_{2''} \quad \varphi_{3''} \quad \varphi_{1'}]$$

e quindi si può ottenere la matrice di Dirichlet del triangolo E assemblando opportunamente le matrici di Dirichlet dei triangoli E_1 ed E_2, tenendo conto della disposizione dei nodi nei triangoli separati ed in quello connesso:

$$S_E = \begin{bmatrix} S_{11}^{E1} & S_{12}^{E1} & S_{13}^{E1} & 0 \\ S_{21}^{E1} & S_{22}^{E1} + S_{22}^{E2} & S_{23}^{E1} + S_{23}^{E2} & S_{21}^{E2} \\ S_{31}^{E1} & S_{32}^{E1} + S_{32}^{E2} & S_{33}^{E1} + S_{33}^{E2} & S_{31}^{E2} \\ 0 & S_{12}^{E2} & S_{13}^{E2} & S_{11}^{E2} \end{bmatrix}$$

In generale, dopo aver suddiviso il dominio Ω con N_E elementi di un certo tipo ed ordine, la funzione φ viene approssimata negli N_T nodi del reticolo ad elementi finiti come:

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^{N_T} \alpha_i(r)\varphi_i$$

dove φ_i sono i valori nodali del potenziale e α_i sono le funzioni interpolanti (o funzioni di forma), ed il funzionale viene calcolato come somma dei funzionali calcolati nei singoli elementi, mediante un opportuno processo di assemblaggio:

$$F(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_E} F_i(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi]^T [S][\varphi]$$

Minimizzare il funzionale F(φ) rendendolo stazionario rispetto alle variazioni delle incognite nodali, significa porre:

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_i} = 0$$

per ogni φ_i non assegnato.

Quindi supponiamo di avere N_I potenziali incogniti e N_D potenziali assegnati (mediante condizioni al contorno di tipo Dirichlet) tali che $N_T = N_I + N_D$; supponiamo inoltre di numerare i nodi in modo che il vettore dei potenziali risulti partizionato in due:

$$[\varphi]^T = \begin{bmatrix} \varphi_I^T & \varphi_D^T \end{bmatrix} \quad e \quad F(\varphi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \varphi_I^T & \varphi_D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{II} & S_{ID} \\ S_{DI} & S_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_I \\ \varphi_D \end{bmatrix}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{\varphi_I^T S_{II}\varphi_I + \varphi_I^T S_{ID}\varphi_D + \varphi_D^T S_{DI}\varphi_I + \varphi_D^T S_{DD}\varphi_D\right\}$$

allora la stazionarietà del funzionale si può esprimere come (tenendo conto della simmetria della matrice [S]):

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial F(\varphi)}{\partial (\varphi_I)_i} = \frac{1}{2}\left\{2S_{II}\varphi_I + S_{ID}\varphi_D + \varphi_D^T S_{DI} + 0\right\} = \frac{1}{2}\left\{2S_{II}\varphi_I + 2S_{ID}\varphi_D\right\} = \begin{bmatrix} S_{II} & S_{ID} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_I \\ \varphi_D \end{bmatrix} = 0$$

Durante l'assemblaggio del sistema risolvente i termini delle matrici Dirichlet che sono associati ai nodi sul contorno con potenziale assegnato (condizioni al contorno di tipo Dirichlet) vengono portati al secondo membro:

$$[S_{II}][\varphi_I] = -[S_{ID}][\varphi_D] \qquad (***)$$

e formano così il termine noto [B].

Partendo dall'espressione (*) e scegliendo le funzioni peso w uguali alle funzioni di forma α (metodo di Galerkin), si scrive una relazione per ogni nodo incognito del triangolo Ω_e:

$$\left[\int_{\Omega_e} \nabla\alpha_i \cdot \nabla\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\varphi_j d\Omega_e\right] = \sum_{j=1}^{3}\left[\int_{\Omega_e}\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j d\Omega_e\right]\varphi_j = 0$$

e assemblando, similmente a quanto fatto sopra, nell'intero dominio Ω, si ottiene lo stesso sistema risolvente (***).

Il sistema risolvente globale sarà allora un sistema di N_I equazioni algebriche a coefficienti costanti che scritto in forma matriciale è:

$$[A][\varphi_I] = [B]$$

La matrice dei coefficienti [A] è simmetrica, sparsa ed a banda stretta ed il sistema può quindi essere efficacemente risolto con opportuni algoritmi iterativi che sfruttano queste caratteristiche della matrice.

Il FEM deve il suo successo alla semplicità concettuale (dovuta soprattutto al legame con la realtà fisica che viene mantenuto anche dopo la discretizzazione del dominio d'interesse), alla possibilità di trattare facilmente disomogeneità e non linearità dei materiali ed alle proprietà di sparsità, simmetria e limitatezza di banda della matrice dei coefficienti del sistema risolvente. Un limite connaturato al FEM consiste nell'impossibilità di trattare domini di estensione illimitata come frequentemente è necessario nell'elettromagnetismo: discretizzare un dominio comunque ampio, oltre a far aumentare notevolmente il numero delle incognite, non conduce a soluzioni sufficientemente accurate. Per ovviare a questa difficoltà sono state sviluppate numerose tecniche da affiancare al FEM per la soluzione di problemi in domini illimitati: elementi infiniti, trasformazioni di coordinate, FEM-BEM, *boundary-dampers*, tecniche iterative ad elementi finiti.