

I METODI INDIRETTI

Formulazione debole: metodo dei residui pesati

Quando la geometria del sistema diventa più complicata ed i mezzi sono disomogenei (o anche non lineari) si preferisce risolvere l'equazione differenziale alle derivate parziali che governa il problema non con metodi che tentano la soluzione diretta (come il metodo delle differenze finite) ma in senso medio (attraverso l'applicazione del metodo dei residui pesati) o con un metodo variazionale (tentando cioè di trovare qual è la funzione che minimizza l'energia del sistema).

Con il metodo dei residui pesati si sostituisce alla soluzione esatta del problema una soluzione approssimata dell'equazione differenziale e delle condizioni al contorno; l'errore così commesso (detto residuo) viene in qualche modo distribuito, mediante delle funzioni peso, nel dominio d'interesse e reso nullo in senso medio, annullandone l'integrale nel dominio e sul contorno.

Il metodo dei residui pesati applicato al problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} = f & \text{in } \Omega \\ V = \bar{\varphi} & \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \bar{q} & \text{su } \Gamma_2 \end{cases}$$

conduce alla seguente formulazione:

$$\int_{\Omega} w(\nabla^2 \varphi - f) d\Omega + \int_{\Gamma_1} w_1(\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \quad (*)$$

in cui φ è una soluzione approssimata del problema e w , w_1 e w_2 sono delle funzioni arbitrarie;

$R = (\nabla^2 \varphi - f)$ è un residuo, così come gli errori sulle condizioni al contorno: $R_1 = (\varphi - \bar{\varphi})$ e

$$R_2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{q} \right)$$

Infatti, applicando il metodo per semplicità all'equazione di Laplace ($f = 0$), supponendo di conoscere la soluzione φ_0 del problema, calcoliamo nel dominio Ω l'integrale della funzione peso w per $\nabla^2 \varphi_0$, che sappiamo essere identicamente nullo:

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \varphi_0 d\Omega \equiv 0$$

Integrando per parti si ha:

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \varphi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} w \nabla \varphi_0 \cdot \hat{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi_0 d\Omega \equiv 0$$

dove \hat{n} è il versore della normale a Γ in ogni punto. Integrando nuovamente per parti l'ultimo termine:

$$\int_{\Gamma} w \nabla \varphi_0 \cdot \hat{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi_0 \nabla w \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_0 \nabla^2 w d\Omega \equiv 0$$

ovvero:

$$\int_{\Gamma} w \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_0 \nabla^2 w d\Omega \equiv 0$$

da cui, separando Γ in Γ_1 e Γ_2 ed imponendo le condizioni al contorno, otteniamo:

$$\int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \varphi_0 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_0 \nabla^2 w d\Omega \equiv 0$$

Sostituendo alla soluzione esatta φ_0 la soluzione approssimata φ e integrando nuovamente per parti due volte l'ultimo termine si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \varphi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \varphi \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} w \nabla^2 \varphi d\Omega = 0 \end{aligned}$$

da cui eliminando i termini opposti e raggruppando sotto lo stesso simbolo gli integrali calcolati sullo stesso dominio si ottiene:

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0 \quad (**)$$

che è proprio la formulazione (*) sopra riportata con:

$$f = 0, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{e} \quad w_2 = -w$$

Se, come avviene nel FEM, la funzione approssimata φ soddisfa le condizioni al contorno di Dirichlet ($\varphi = \bar{\varphi}$ su Γ_1) la relazione (**) diventa:

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \varphi d\Omega - \int_{\Gamma_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \bar{q} d\Gamma = 0$$

Per abbassare il grado di continuità per la funzione approssimata φ (che nell'espressione precedente deve essere due volte differenziabile) si integra per parti il primo termine:

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \bar{q} d\Gamma = 0$$

e scegliendo w in maniera che sia nulla su Γ_1 ricaviamo la formulazione del metodo dei residui pesati utilizzata per il FEM:

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Gamma_2} w \bar{q} d\Gamma$$

Se invece la funzione approssimata φ soddisfa identicamente l'equazione di Laplace in Ω , dalla relazione (**) otteniamo:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} (\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma$$

relazione che sta alla base della formulazione indiretta dei problemi di valori al contorno nella teoria del potenziale (tale formulazione è detta indiretta perché in essa l'incognita non è il potenziale o la sua derivata normale ma la distribuzione delle sorgenti sul contorno; note le condizioni al contorno, di tipo Dirichlet e Neumann, è possibile risalire alla distribuzione, a volte fittizia, delle

sorgenti sul contorno stesso e ricavare quindi il potenziale in ogni punto del dominio Ω mediante opportune integrazioni).

Se, infine, come avviene nel BEM, è la funzione peso w che soddisfa identicamente l'equazione di Laplace in Ω , integrando per parti due volte il primo integrale della relazione (***) si ricava:

$$\int_{\Gamma_1} \left(w \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \left(\varphi \frac{\partial w}{\partial n} - w \bar{q} \right) d\Gamma$$

(questa relazione sta alla base della formulazione diretta, usata nel BEM, in cui i valori del potenziale - condizioni di Dirichlet - e della sua derivata normale - condizioni di Neumann - sul contorno sono utilizzate direttamente per calcolare il potenziale in tutto il dominio Ω mediante opportune funzioni di Green, soluzioni fondamentali dell'equazione di Laplace).

Formulazione variazionale: metodo di Ritz

I metodi variazionali si basano sul principio di minimo dell'energia: in essi si tenta di minimizzare un funzionale (il cui significato fisico è in genere legato all'energia del sistema) associato all'equazione differenziale che definisce il problema: si può infatti dimostrare che la funzione che rende minimo il funzionale soddisfa anche l'equazione differenziale e viceversa. Supponiamo, a titolo d'esempio, di conoscere la funzione φ_0 soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = \bar{\varphi} & \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_2 \end{cases}$$

Il funzionale associato all'equazione di Laplace è del tipo:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega$$

Costruiamo la funzione $(\varphi_0 + \eta h)$ dove η è uno scalare ed h è una funzione arbitraria differenziabile che vale zero su Γ_1 . Il funzionale calcolato per questa funzione (che non è soluzione del problema) sarà allora:

$$\begin{aligned} F(\varphi_0 + \eta h) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\varphi_0 + \eta h)|^2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla(\varphi_0 + \eta h) \cdot \nabla(\varphi_0 + \eta h) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 d\Omega + \frac{\eta^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 d\Omega + \eta \int_{\Omega} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla h d\Omega \end{aligned}$$

ed integrando per parti l'ultimo termine si ha:

$$F(\varphi_0 + \eta h) = F(\varphi_0) + \eta^2 F(h) + \eta \int_{\Gamma} h \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\Gamma - \eta \int_{\Omega} h \nabla^2 \varphi_0 d\Omega$$

Gli ultimi due integrali sono nulli: il primo perché h si annulla su Γ_1 e $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$ su Γ_2 , il secondo perché φ_0 è soluzione dell'equazione di Laplace in Ω . In definitiva si ottiene:

$$F(\varphi_0 + \eta h) = F(\varphi_0) + \eta^2 F(h)$$

Poiché $F(h)$ è non negativo, è evidente che il valore minimo del funzionale per $\forall h$ si ha se $\eta=0$: la funzione φ_0 , soluzione dell'equazione differenziale, rende quindi minimo il funzionale. L'errore commesso utilizzando la funzione approssimata nel calcolo del funzionale è proporzionale al valore di η^2 , mentre quello commesso su φ è proporzionale a η : se dalla soluzione del problema si vogliono ottenere quantità legate all'energia, questo metodo garantisce una precisione maggiore.

Le tecniche variazionali possono essere utilizzate se è noto il funzionale associato al problema; un particolare metodo dei residui pesati, il metodo di Galerkin, conduce ad una formulazione del sistema risolvibile identica a quella ottenuta utilizzando un metodo variazionale. Il metodo di Galerkin ha il vantaggio di poter essere applicato anche per quei problemi in cui il funzionale dell'energia non è noto oppure è di difficile determinazione.