

I metodi di soluzione dell'equazione di Poisson

SCHEMA

Metodi analitici (cenni)

- Metodo delle trasformazioni conformi
- Metodo della separazione delle variabili

Metodi numerici diretti

- Metodo delle differenze finite
 - Sviluppo di una funzione in serie di Taylor nell'intorno di un punto
 - Approssimazione della derivata seconda
 - Applicazione all'equazione di Laplace in 2D
 - Breve descrizione del procedimento risolutivo

Metodo dei residui pesati

- Formulazione generale
- Formulazione FEM
- Formulazione inversa
- Formulazione BEM

Metodo variazionale

- Funzionale associato all'equazione di Laplace
- Funzione che rende minimo il funzionale

FEM

- Discretizzazione del dominio con elementi simplex
- Approssimazione del potenziale in un elemento
- Funzioni di forma
- Matrice di Dirichlet di elemento
- Assemblaggio del sistema risolvete
- Stazionarietà del funzionale
- Soluzione del sistema risolvete

I problemi di campo elettrostatico sono retti dalla equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

con ovvio significato dei simboli.

Si può dimostrare che noto ρ in ogni punto di una regione e le condizioni al contorno di tipo Dirichlet per il potenziale elettrostatico su tutta la superficie che racchiude la regione, la soluzione dell'equazione di Poisson esiste ed è unica (se le condizioni al contorno note sono di tipo Neumann, la soluzione è unica a meno di una costante additiva).

Se ρ è ovunque nulla nella regione considerata, l'equazione di Poisson diventa l'equazione di Laplace: $\nabla^2 \varphi = 0$.

La soluzione in forma chiusa dell'equazione di Poisson (o di quella di Laplace) per integrazione diretta dell'equazione differenziale è possibile solo nei casi in cui la regione considerata ha una geometria molto semplice; esistono comunque diversi metodi per ottenere soluzioni anche approssimate di queste equazioni per via analitica o numerica (tralasciando i metodi grafici, come quello di Lehmann, oramai di scarsa applicazione). Per descrivere alcuni di questi metodi considereremo, per maggiore semplicità, l'equazione di Laplace.

I metodi analitici forniscono soluzioni esatte ed in genere sono quindi preferibili, ma la loro applicabilità è limitata: il metodo delle trasformazioni conformi e quello della separazione delle variabili sono tra i metodi analitici più utilizzati.

Il metodo delle trasformazioni conformi è impiegato nella soluzione di problemi retti dall'equazione di Laplace, con le relative condizioni al contorno, definiti in domini bidimensionali. Esso si basa sulla proprietà della parte reale e di quella immaginaria di una funzione analitica di variabile complessa di soddisfare identicamente l'equazione di Laplace.

Oltre al fatto che possono essere applicate solo in due dimensioni, un altro limite delle trasformazioni conformi consiste nella impossibilità di definire un metodo unico per ricavare la legge di trasformazione: tale metodo esiste solo quando i contorni del sistema da studiare sono delle linee rette che si intersecano con angoli arbitrari (trasformazioni di Schwarz-Christoffel).

Il metodo della separazione delle variabili si basa sulla ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale alle derivate parziali formate dal prodotto di funzioni ognuna dipendente da una sola variabile. Ciò consente di trasformare l'equazione differenziale alle derivate parziali in un insieme di equazioni differenziali ordinarie ciascuna delle quali è risolvibile separatamente.

Il metodo della separazione delle variabili può essere applicato per funzioni di un numero qualsiasi di variabili e quindi anche in tre dimensioni; ovviamente deve essere possibile separare le variabili e ciò è legato alla geometria del sistema da studiare ed alle relative condizioni al contorno sul potenziale e questo limita il campo d'applicabilità del metodo.

I limiti dei metodi analitici nel risolvere problemi di elettrostatica retti dall'equazione di Laplace (e ancor più per problemi di campo elettromagnetico retti da equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo più complesso) rendono spesso necessario l'uso di metodi numerici che forniscono, in generale, una soluzione approssimata del problema. Il vantaggio di tali metodi consiste nel fatto che essi conducono, a partire dall'equazione differenziale alle derivate parziali, ad un sistema risolvibile di equazioni algebriche lineari a coefficienti costanti; con l'avvento e la diffusione degli elaboratori elettronici, i metodi numerici hanno assunto un'importanza notevole potendo affidare ai calcolatori la costruzione e la soluzione dei sistemi di equazioni algebriche: in tal modo è possibile assemblare e risolvere un numero elevato di equazioni, aumentando così la precisione delle soluzioni approssimate che i metodi numerici forniscono.

Il metodo delle differenze finite, il metodo degli elementi sul contorno (in inglese "boundary element method" - BEM) ed il metodo degli elementi finiti (in inglese "finite element method" - FEM) sono le tecniche numeriche maggiorate utilizzate nella soluzione di problemi di campi elettromagnetici.

IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE

Il metodo delle differenze finite è stato il primo ad affermarsi grazie soprattutto alla sua semplicità concettuale.

Esso si basa sull'approssimazione delle derivate parziali prime e seconde che compaiono nelle equazioni differenziali mediante differenze dei valori finiti che la funzione da differenziare assume in alcuni punti del dominio in cui è definito il problema. In particolare, si sovrappone al dominio una griglia di punti (detti nodi) che per semplicità supporremo equispaziati (con h indicheremo la distanza tra due nodi vicini); in una dimensione, ad esempio, la funzione f (di una sola variabile) può essere sviluppata nell'intorno del generico punto x come:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + \dots$$

oppure come:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + \dots$$

Sommando le due serie si ottiene:

$$f(x+h) + f(x-h) = f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{IV}(x) + \dots$$

e quindi, se tronchiamo la serie alla derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

L'errore commesso è:

$$\frac{\frac{h^4}{12} f^{IV}(x)}{h^2}$$

proporzionale ad h^2 ed al tendere di h a zero tende rapidamente a zero.

L'approssimazione delle derivate prime, eventualmente presenti nell'equazione differenziale, si ottiene dalla sottrazione dei due sviluppi in serie:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

e l'errore è ancora proporzionale ad h^2 .

L'estensione dell'approssimazione al caso bidimensionale è immediata, e l'equazione di Laplace nell'intorno del generico punto di coordinate (x,y) diventa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h) - 4f(x,y)}{h^2} = 0$$

Supponendo di voler risolvere con il metodo delle differenze finite l'equazione di Laplace per la funzione potenziale scalare elettrostatico φ nel dominio bidimensionale omogeneo Ω con condizioni al contorno di Dirichlet su Γ_1 e di Neumann omogenee su Γ_2 (dove $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ è la frontiera di Ω), si deve dapprima discretizzare il dominio Ω mediante una griglia di nodi di densità opportuna (in relazione alla geometria del dominio) e quindi approssimare l'equazione di Laplace nei nodi della griglia in cui il potenziale non è assegnato.

Dal problema iniziale:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = \bar{\varphi} & \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_2 \end{cases}$$

si ottiene un sistema di equazioni lineari algebriche a coefficienti costanti le cui incognite sono i valori del potenziale nei nodi in cui questo non è assegnato ed il cui termine noto è costituito dai valori $\bar{\varphi}$ nei nodi della griglia che cadono su Γ_1 . La condizione omogenea di Neumann si impone facilmente sui nodi di Γ_2 se perpendicolare ad un asse: per esempio nel caso in cui Γ_2 è perpendicolare all'asse x essa si traduce in:

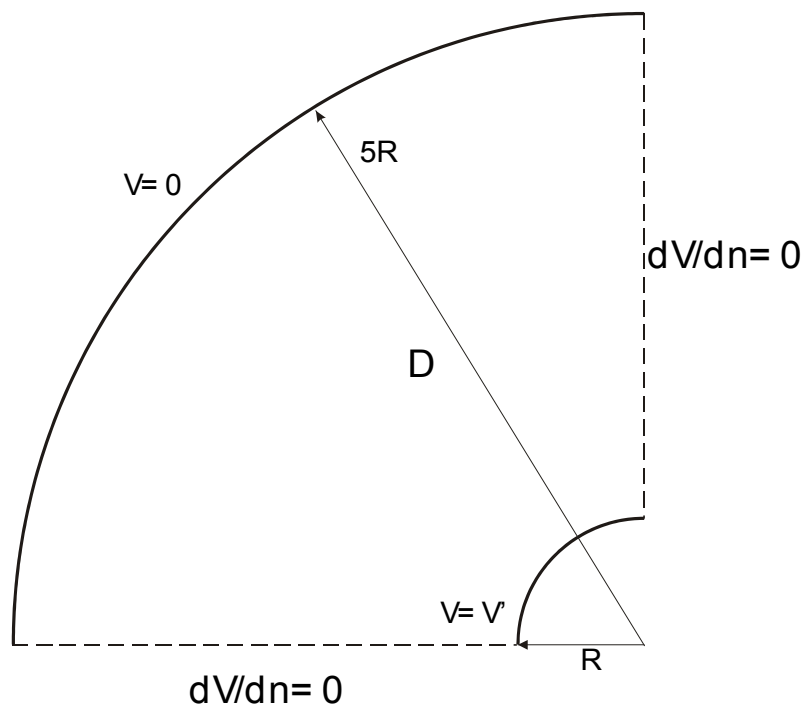
$$\varphi(x_{i-1}, y_j) = \varphi(x_{i+1}, y_j)$$

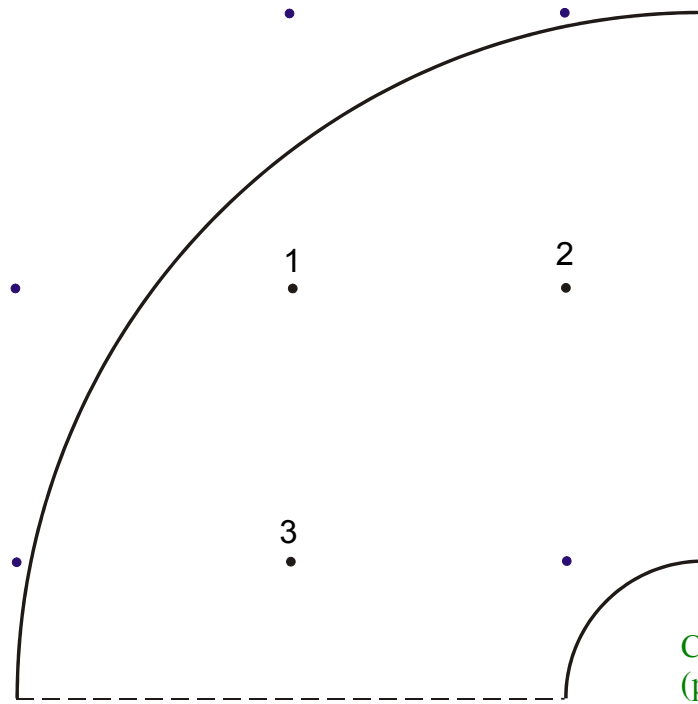
dove $\varphi(x_{i+1}, y_j)$ è il valore di φ nell'ipotetico nodo vicino a Γ_2 ed esterno ad Ω nella direzione x.

Il sistema algebrico così ottenuto può essere risolto con opportuni algoritmi diretti o iterativi: questi ultimi in particolare sfruttano metodi di rilassamento numerico per accelerare la convergenza alla soluzione finale.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 & \text{in } D \\ V = V' & \text{per } r = R \\ V = 0 & \text{per } r = 5R \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{per } \vartheta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{per } \vartheta = \pi \end{cases} \quad V(r) = \frac{V'}{\ln\left(\frac{R}{5R}\right)} \ln\left(\frac{r}{5R}\right)$$





C.C.: Neumann omogenea
(punti simmetrici)
C.C.: Dirichlet
Punti emisimmetrici
Punti interni (incognite)

prima approssimazione

$$0 + f_2 + f_3 + 0 - 4f_1 = 0$$

$$f_1 + f_2 + 0 + V' - 4f_2 = 0$$

$$0 + V' + f_1 + f_3 - 4f_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V' \\ -V' \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -V' & -3 & 0 \\ -V' & 0 & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$f_1 = 0.2V'$$

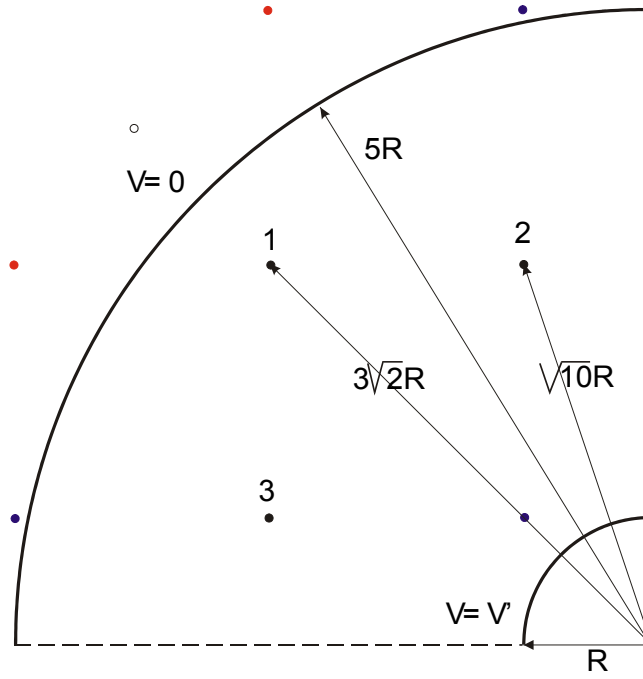
$$f_3 = \frac{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -V' \\ 1 & 0 & -V' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$f_3 = 0.4V'$$

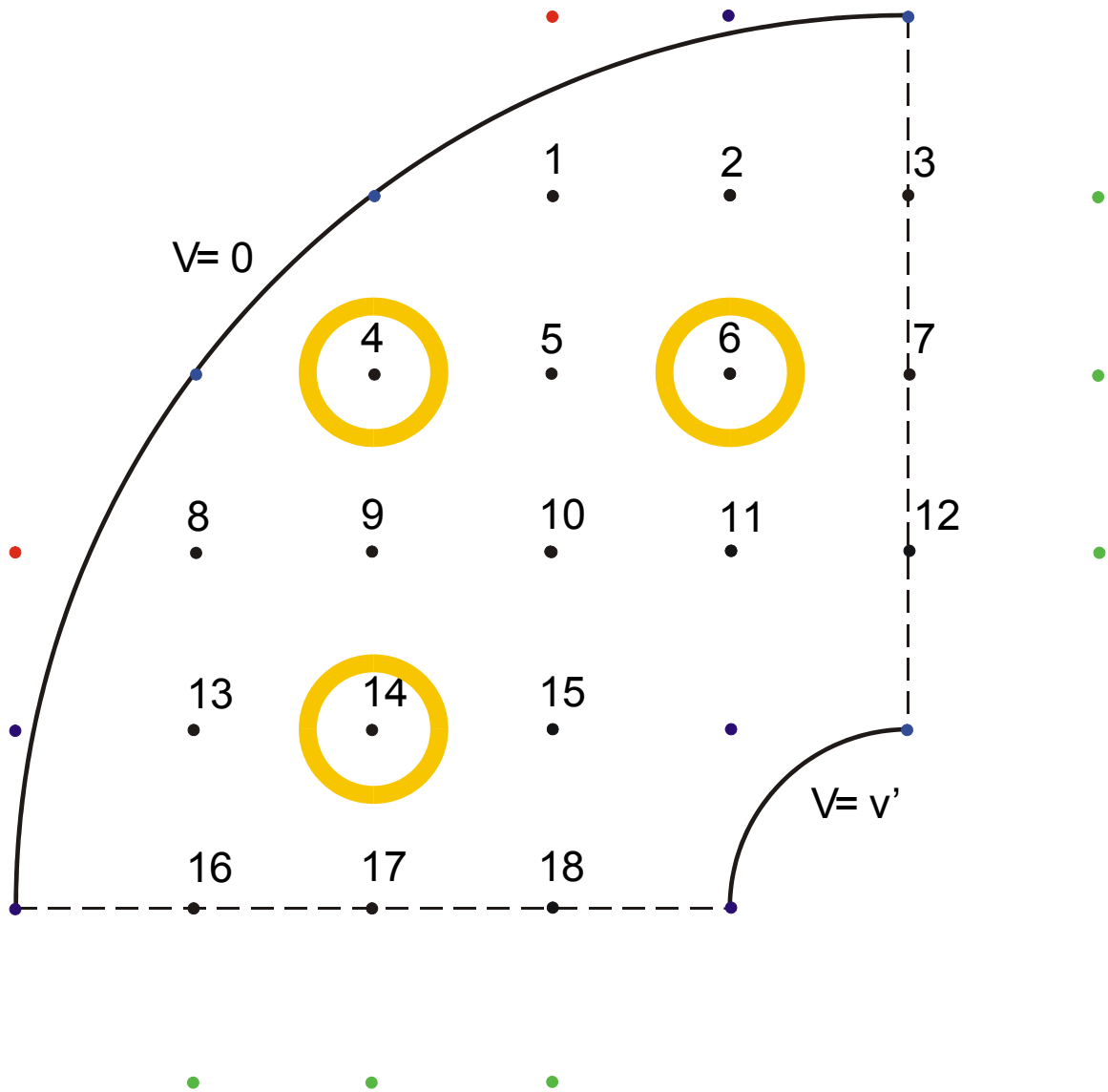
$$f_2 = \frac{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -V' & 0 \\ 1 & -V' & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$f_2 = 0.4V'$$

C.C.: Neumann omogenea
 (punti simmetrici)
 C.C.: Dirichlet
 Punti emisimmetrici
 Punti interni (incognite)



seconda approssimazione
 (migliore approssimazione del contorno circolare esterno))



terza approssimazione

coefficienti

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	-5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	-4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	2	-4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-4	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-4	1	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	1	0	1	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-4	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	-4	1	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	-4	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	-4

Termine noto

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	$-V'$
12	$-V'$
13	0
14	0
15	$-V'$
16	0
17	0
18	$-V'$

$$V_1 = V(3\sqrt{2}R) = 0.102 \cdot V'$$

$$V_2 = V_3 = V(\sqrt{10}R) = 0.285 \cdot V'$$

prima approssimazione:

$$V_1 = \frac{V'}{5} = 0.2 \cdot V'$$

$$V_2 = V_3 = \frac{2 \cdot V'}{5} = 0.4 \cdot V'$$

seconda appr.:

$$V_1 = \frac{V'}{8} = 0.125 \cdot V'$$

$$V_2 = V_3 = \frac{3 \cdot V'}{8} = 0.375 \cdot V'$$

terza appr.:

$$V_1 = 0.119 \cdot V'$$

$$V_2 = V_3 = 0.339 \cdot V'$$

errore seconda approssimazione:

$$e_1 \% = \frac{|V(3\sqrt{2}R) - V_1|}{V(3\sqrt{2}R)} \cdot 100 = 22.5\%$$

$$e_2 \% = e_3 \% = \frac{|V(\sqrt{10}R) - V_2|}{V(\sqrt{10}R)} \cdot 100 = 31.7\%$$

errore terza approssimazione:

$$e_1 \% = \frac{|V(3\sqrt{2}R) - V_1|}{V(3\sqrt{2}R)} \cdot 100 = 17\%$$

$$e_2 \% = e_3 \% = \frac{|V(\sqrt{10}R) - V_2|}{V(\sqrt{10}R)} \cdot 100 = 19\%$$