

Esercitazioni di Elettrotecnica  
del corso di recupero per il CdL in Ingegneria Informatica

Esercitazione 8

Rappresentazioni di doppi bipoli lineari.

Trasformazioni tra le rappresentazioni ( $\Delta$  = Determinante della matrice)

A \ DA	R	G	H	H'	T	T'
R		$\frac{G_{22}}{\Delta G} \quad -\frac{G_{12}}{\Delta G}$ $-\frac{G_{21}}{\Delta G} \quad \frac{G_{11}}{\Delta G}$	$\frac{\Delta H}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{H'_{11}} \quad -\frac{H'_{12}}{H'_{11}}$ $\frac{H'_{21}}{H'_{11}} \quad \frac{\Delta H'}{H'_{11}}$	$\frac{A}{C} \quad \frac{\Delta T}{C}$ $\frac{1}{C} \quad \frac{D}{C}$	$\frac{D'}{C'} \quad \frac{1}{C'}$ $\frac{\Delta T'}{C'} \quad \frac{A'}{C'}$
G	$\frac{R_{22}}{\Delta R} \quad -\frac{R_{12}}{\Delta R}$ $-\frac{R_{21}}{\Delta R} \quad \frac{R_{11}}{\Delta R}$		$\frac{1}{H_{11}} \quad -\frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\Delta H}{H_{11}}$	$\frac{\Delta H'}{H'_{22}} \quad \frac{H'_{12}}{H'_{22}}$ $-\frac{H'_{21}}{H'_{22}} \quad \frac{1}{H'_{22}}$	$\frac{D}{B} \quad -\frac{\Delta T}{B}$ $-\frac{1}{B} \quad \frac{A}{B}$	$\frac{A'}{B'} \quad -\frac{1}{B'}$ $-\frac{\Delta T'}{B'} \quad \frac{D'}{B'}$
H	$\frac{\Delta R}{R_{22}} \quad \frac{R_{12}}{R_{22}}$ $-\frac{R_{21}}{R_{22}} \quad \frac{1}{R_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}} \quad -\frac{G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}} \quad \frac{\Delta G}{G_{11}}$		$\frac{H'_{22}}{\Delta H'} \quad -\frac{H'_{12}}{\Delta H'}$ $-\frac{H'_{21}}{\Delta H'} \quad \frac{H'_{11}}{\Delta H'}$	$\frac{B}{D} \quad \frac{\Delta T}{D}$ $-\frac{1}{D} \quad \frac{C}{D}$	$\frac{B'}{A'} \quad \frac{1}{A'}$ $-\frac{\Delta T'}{A'} \quad \frac{C'}{A'}$
H'	$\frac{1}{R_{11}} \quad -\frac{R_{12}}{R_{11}}$ $\frac{R_{21}}{R_{11}} \quad \frac{\Delta R}{R_{11}}$	$\frac{\Delta G}{G_{22}} \quad \frac{G_{12}}{G_{22}}$ $-\frac{G_{21}}{G_{22}} \quad \frac{1}{G_{22}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta H} \quad -\frac{H_{12}}{\Delta H}$ $-\frac{H_{21}}{\Delta H} \quad \frac{H_{11}}{\Delta H}$		$\frac{C}{A} \quad -\frac{\Delta T}{A}$ $\frac{1}{A} \quad \frac{B}{A}$	$\frac{C'}{D'} \quad -\frac{1}{D'}$ $\frac{\Delta T'}{D'} \quad \frac{B'}{D'}$
T	$\frac{R_{11}}{R_{21}} \quad \frac{\Delta R}{R_{21}}$ $\frac{1}{R_{21}} \quad \frac{R_{22}}{R_{21}}$	$-\frac{G_{22}}{G_{21}} \quad -\frac{1}{G_{21}}$ $-\frac{\Delta G}{G_{21}} \quad -\frac{G_{11}}{G_{21}}$	$-\frac{\Delta H}{H_{21}} \quad -\frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}} \quad -\frac{1}{H_{21}}$	$\frac{1}{H'_{21}} \quad \frac{H'_{22}}{H'_{21}}$ $\frac{H'_{11}}{H'_{21}} \quad \frac{\Delta H'}{H'_{21}}$		$\frac{D'}{\Delta T'} \quad \frac{B'}{\Delta T'}$ $\frac{C'}{\Delta T'} \quad \frac{A'}{\Delta T'}$
T'	$\frac{R_{22}}{R_{12}} \quad \frac{\Delta R}{R_{12}}$ $\frac{1}{R_{12}} \quad \frac{R_{11}}{R_{12}}$	$-\frac{G_{11}}{G_{12}} \quad -\frac{1}{G_{12}}$ $-\frac{\Delta G}{G_{12}} \quad -\frac{G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}} \quad \frac{H_{11}}{H_{12}}$ $\frac{H_{22}}{H_{12}} \quad \frac{\Delta H}{H_{12}}$	$-\frac{\Delta H'}{H'_{12}} \quad -\frac{H'_{22}}{H'_{12}}$ $-\frac{H'_{11}}{H'_{12}} \quad -\frac{1}{H'_{12}}$	$\frac{D}{\Delta T} \quad \frac{B}{\Delta T}$ $\frac{C}{\Delta T} \quad \frac{A}{\Delta T}$	

**N.B.** : Per poter trasformare una rappresentazione in un'altra è necessario che i denominatori delle frazioni siano diversi da zero.

Potenza totale assorbita da un doppio bipolo

$$P_{totale} = V_1 I_1 + V_2 I_2$$

Il bipolo si dice passivo se per ogni insieme di tensioni e correnti che soddisfano le equazioni costitutive si ha:  $P_{totale} > 0$ .

Reciprocità e simmetria

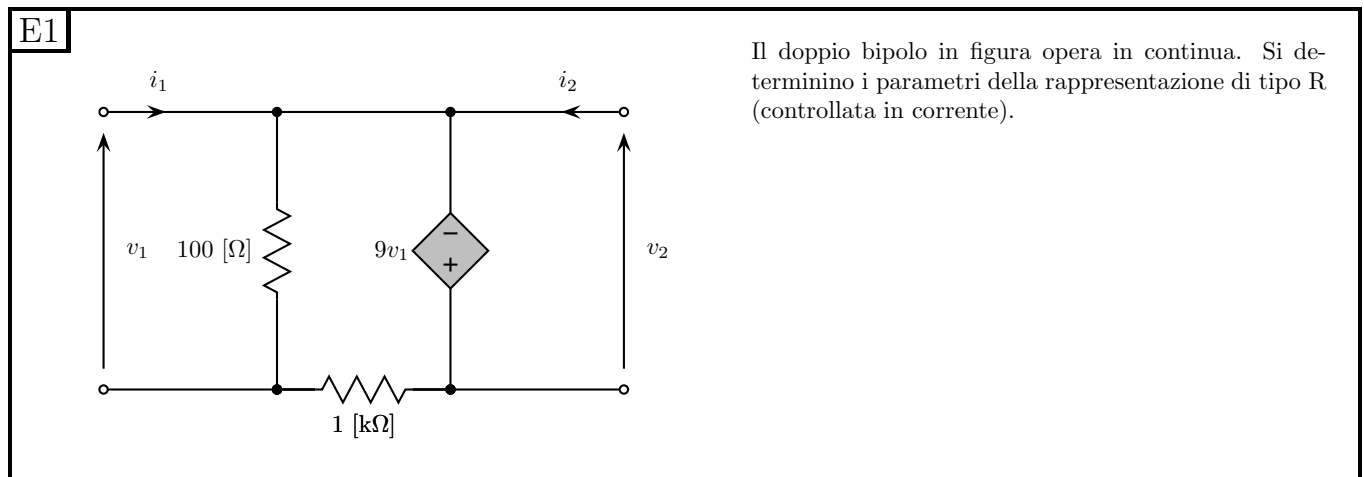
Un doppio bipolo è *reciproco* se date due coppie diverse di tensioni e correnti, che soddisfano le relazioni costitutive, se inverte le porte di ingresso e di uscita il circuito non cambia.

La *simmetria* è la proprietà per cui se inverte le porte di ingresso e di uscita il comportamento del bipolo non cambia. Un bipolo simmetrico è anche reciproco, ma non vale il contrario.

Rappresentazione	Condizione di reciprocità e simmetria
Matrice R	$R_{12} = R_{21}$ (simmetrico se anche $R_{11} = R_{22}$ )
Matrice G	$G_{12} = G_{21}$ (simmetrico se anche $G_{11} = G_{22}$ )
Matrice H	$H_{12} = -H_{21}$ (simmetrico se anche: $\det(H) = 1$ )
Matrice H'	$H'_{12} = -H'_{21}$ (simmetrico se anche: $\det(H') = 1$ )
Matrice T	determinante di T = 1 (simmetrico se anche A = D)
Matrice T'	determinante di T' = 1 (simmetrico se anche A' = D')

## 1.11 E1, T.E. del 05-07-2004, prof. D'Amore

### 1.11.1 Testo



### 1.11.2 Soluzione

Scriviamo innanzitutto in forma simbolica la formulazione richiesta.

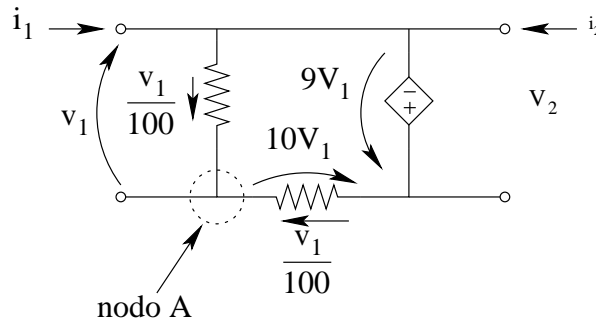
$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

Si noti come non vi siano i termini noti, dato che nella rete non vi sono generatori impressivi.

Per il calcolo dei parametri ( $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$ ) abbiamo a disposizione sia il metodo delle prove semplici che la scrittura diretta delle relazioni. Per scrivere direttamente le relazioni cercate, dobbiamo riuscire a scrivere le variabili controllate in funzione delle controllanti, quindi cerchiamo di esprimere le varie tensioni e correnti della rete in funzione delle stesse, ovvero di  $i_1$  e  $i_2$ .

Si osserva immediatamente che, per effetto del generatore pilotato si ha:

$$v_2 = -9v_1$$



Dalla figura si nota come la tensione sul resistore da  $1k\Omega$  sia di  $10v_1$  (LKT alla maglia composta dai resistori e dal generatore pilotato). Si riesce quindi a scrivere una LKC al nodo A che consente di esprimere  $i_1$

$$i_1 = \frac{v_1}{100\Omega} + \frac{10v_1}{1000\Omega} = \frac{v_1}{50\Omega}$$

esplicitando  $v_1$  otteniamo:

$$v_1 = 50\Omega i_1$$

Inoltre, dato che  $v_2 = -9v_1$  si ottiene

$$v_2 = -9 \cdot 50\Omega i_1 = -450\Omega i_1$$

Le due equazioni della formulazione cardinale controllata in corrente sono quindi

$$\begin{cases} v_1 = 50\Omega i_1 \\ v_2 = -450\Omega i_1 \end{cases}$$

da cui la matrice R richiesta:

$$R = \begin{bmatrix} 50\Omega & 0 \\ -450\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

**1. Doppi-bipoli in regime stazionario**

**ES. 1.1 – Con riferimento al seguente doppio-bipolo:**

a) calcolare la matrice delle resistenze;  
 b) calcolare la matrice delle conduttanze.

$R_A = 2 \Omega, R_B = 1 \Omega,$   
 $R_C = 2.5 \Omega, R_D = 0.5 \Omega.$

a) L'elemento  $R_{11}$  è la resistenza di ingresso alla porta 1 della rete descritta in basso. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo si ottiene:

$$R_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = R_A + \frac{R_C(R_B + R_D)}{R_C + R_B + R_D} = 2.94 \Omega$$

Analogamente, l'elemento  $R_{22}$  è la resistenza di ingresso alla porta 2 della rete seguente (nella quale si è trascurata  $R_A$  che si trova in serie ad un circuito aperto):

$$R_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{R_D(R_B + R_C)}{R_D + R_B + R_C} = 0.44 \Omega$$

Infine l'elemento  $R_m$  si può valutare dalla rete seguente, utilizzando un partitore di corrente:

$$v_2 = R_C i_2 \frac{R_D}{R_D + R_B + R_C}$$

$$R_m = \frac{R_C R_D}{R_D + R_B + R_C} = 0.31 \Omega$$

b) L'elemento  $G_{11}$  è la conduttanza di ingresso alla porta 1 della rete seguente, nella quale si è tenuto conto del fatto che  $R_D$  si trova in parallelo ad un corto-circuito:

$$G_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{G_A(G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C} = 0.37 S$$

L'elemento  $G_{22}$  è la conduttanza di ingresso alla porta 2 della rete seguente:

$$G_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} = G_D + \frac{G_B(G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C} = 2.47 S$$

Infine l'elemento  $G_m$  si può valutare dalla rete seguente, utilizzando un partitore di corrente:

$$i_2 = -\frac{v_B}{R_B} = -\frac{1}{R_B} v_B \frac{R_C // R_B}{R_A + R_C // R_B}$$

$$G_m = -\frac{R_C}{R_A R_C + R_A R_B + R_B R_C} = -0.26 S$$

**ES. 1.2 - Con riferimento alla seguente rete:**

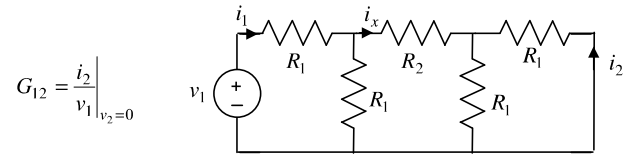
a. valutare la matrice G il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;

$E_1 = E_2 = 10 V$   
 $R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega$

a) L'elemento  $G_{11}$  è la conduttanza di ingresso della rete descritta in seguito. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo di conduttanze si ottiene:

$$G_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{G_1 \left( G_1 + \frac{2G_1 G_2}{2G_1 + G_2} \right)}{2G_1 + \frac{2G_1 G_2}{2G_1 + G_2}} = 0.33 S$$

Per la simmetria della rete rispetto alle due porte, si ha anche  $G_{11} = G_{22}$  (si provi a dimostrarlo). L'elemento  $G_{12}$  è definito come:



Il circuito per il calcolo di tale parametro è disegnato in alto. Si osservi che:

$$G_{12} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = G_{11} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

quindi ci si riporta al calcolo di  $\left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$ , che può essere effettuato con l'applicazione reiterata del partitore di corrente:

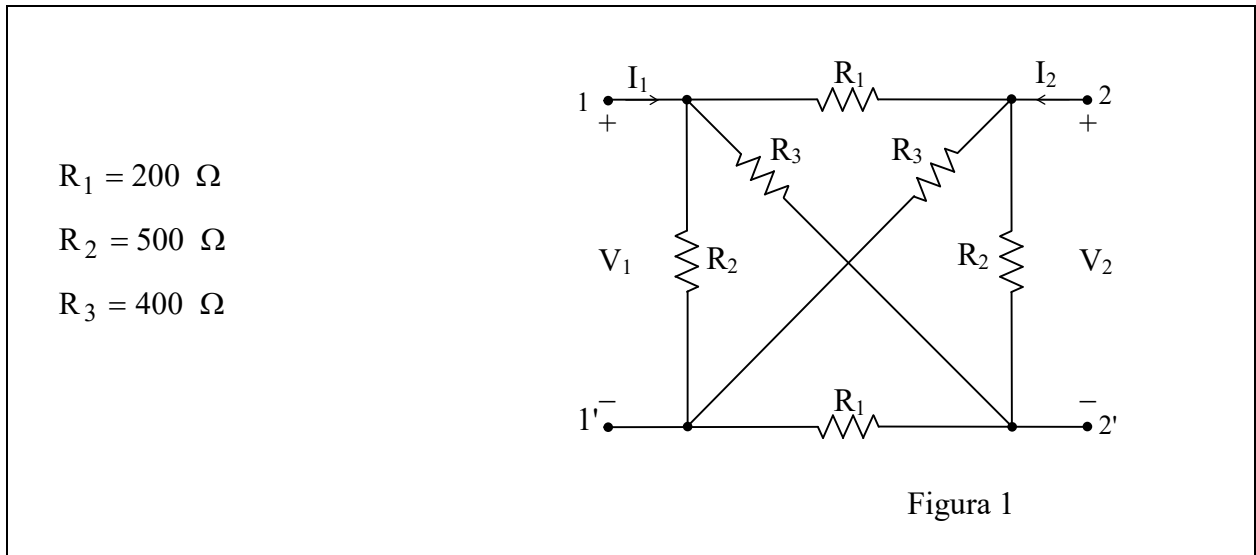
$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-i_x/2}{i_1} = -\frac{1}{2i_1} i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1/2} = -0.25$$

da cui:  $G_{12} = -0.25 \cdot G_{11} = -0.08 \text{ S}$ .

Si provi a verificare che  $G_{12} = G_{21} = G_m$ , proprietà valida per tutti i doppi-bipoli reciproci.

### Esercizio 4.7

Determinare la matrice di trasmissione del doppio bipolo di fig. 1.



Si possono seguire vari procedimenti.

1) Metodo del potenziale ai nodi.

Posto  $E_{1'} = 0$ , si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando che:  $V_1 = E_1$ ,  $V_2 = E_2 - E_{2'}$ , eliminando  $E_{2'}$  dal sistema, si ottengono due equazioni, che risolte rispetto a  $V_1$  ed  $I_1$  consentono di dedurre la matrice di trasmissione [T]. Alternativamente, si può procedere sottraendo la terza equazione dalla seconda:

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) (E_2 - E_{2'}) + \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \right) E_1 = 2I_2 \quad (2)$$

da cui:

$$V_1 = \frac{R_1 R_2 + 2R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 (R_3 - R_1)} V_2 - \frac{2R_1 R_3}{R_3 - R_1} I_2 \quad (3)$$

e quindi:

$$A = \frac{R_1 R_2 + 2R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 (R_3 - R_1)} = 4,6 \quad (4)$$

$$B = \frac{2R_1 R_3}{R_3 - R_1} = 800 \ \Omega \quad (5)$$

Data la simmetria del doppio bipolo, si ha  $A=D$  e  $\det[T]=1$ ; quindi:

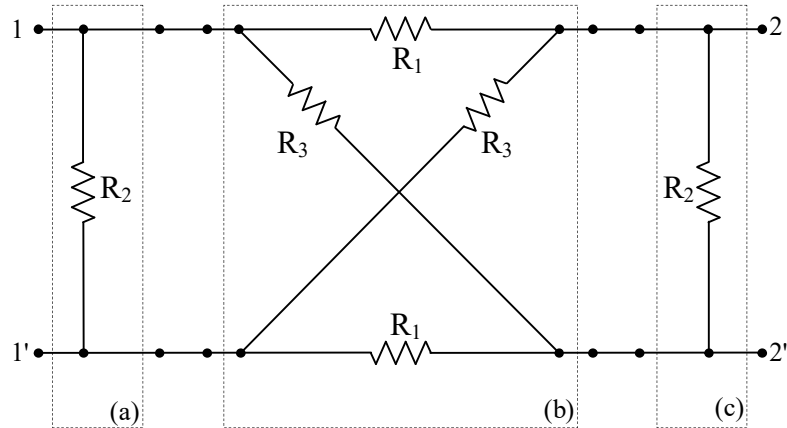


Figura 2

$$D = A = 4,6 \quad (6)$$

$$C = \frac{AD-1}{B} = 0,0252 \text{ S} \quad (7)$$

Dalle formule ottenute si evince che la matrice di trasmissione [T] esiste solo se  $R_1 \neq R_3$ .

### II) Cascata di doppi bipoli.

Il doppio bipolo si può scomporre nella cascata dei tre doppi bipoli indicati con le lettere a, b, c in fig. 2. Per il doppio bipolo (a) si ha:

$$V_1^{(a)} = V_2^{(a)} \quad I_1^{(a)} = \frac{1}{R_2} V_2^{(a)} - I_2^{(a)} \quad (8)$$

e quindi la sua matrice di trasmissione è

$$[T^{(a)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 10^{-3} & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

che coincide con la matrice di trasmissione del doppio bipolo (c).

Per il doppio bipolo (b), è utile ridisegnarlo in modo planare, come in fig. 3. Considerando la porta 2 a vuoto (ossia  $I_2^{(b)} = 0$ ), si ha facilmente:

$$V_1^{(b)} = \frac{R_1 + R_3}{2} I_1^{(b)} \quad V_2^{(b)} = \frac{R_3 - R_1}{2} I_1^{(b)} \quad (10)$$

da cui

$$V_1^{(b)} = \frac{R_3 + R_1}{R_3 - R_1} V_2^{(b)} \quad I_1^{(b)} = \frac{2}{R_3 - R_1} V_2^{(b)} \quad (11)$$

Considerando la porta 2 in corto circuito (ossia  $V_2^{(b)} = 0$ ), si ha:

$$V_1^{(b)} = 2 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I_1^{(b)} \quad I_2^{(b)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \right) V_1^{(b)} \quad (12)$$

da cui:

$$V_1^{(b)} = -2 \frac{R_1 R_3}{R_3 - R_1} I_2^{(b)} \quad I_1^{(b)} = -\frac{R_3 + R_1}{R_3 - R_1} I_2^{(b)} \quad (13)$$

La matrice di trasmissione del doppio bipolo (b) è allora:

$$\begin{aligned} [T^{(b)}] &= \frac{1}{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & 2R_1 R_3 \\ 2 & R_1 + R_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 800 \\ 10^{-2} & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

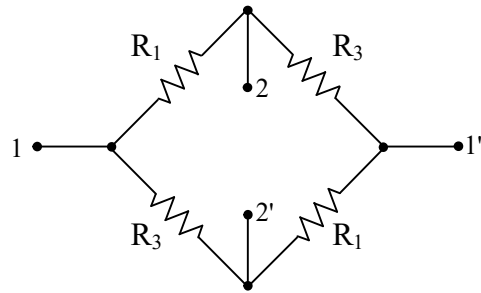


Figura 3

Si noti che per tutti e tre i doppi bipoli valgono le condizioni di simmetria  $A=D$  e  $\det [T]=1$ .

La matrice di trasmissione del doppio bipolo composto è data dal prodotto:

$$[T] = [T^{(a)}] [T^{(b)}] [T^{(c)}] \quad (15)$$

la quale, effettuate le sostituzioni, conduce agli stessi risultati trovati in precedenza.

### III) Parallelo di doppi bipoli

Il doppio bipolo si può considerare come composto dal collegamento parallelo-parallelo di due sottoreti a quattro morsetti (quadripoli), indicati con le lettere a, b, in fig. 4. Tale considerazione in generale non è utile al fine di ricavare il funzionamento del doppio bipolo composto, ma nel caso in questione lo è perché i due quadripoli componenti si comportano entrambi da doppi bipoli, dato che si ha:

$$I_1^{(b)} = I_2^{(b)} = \frac{V_1 - V_2}{2R_3} \quad (16)$$

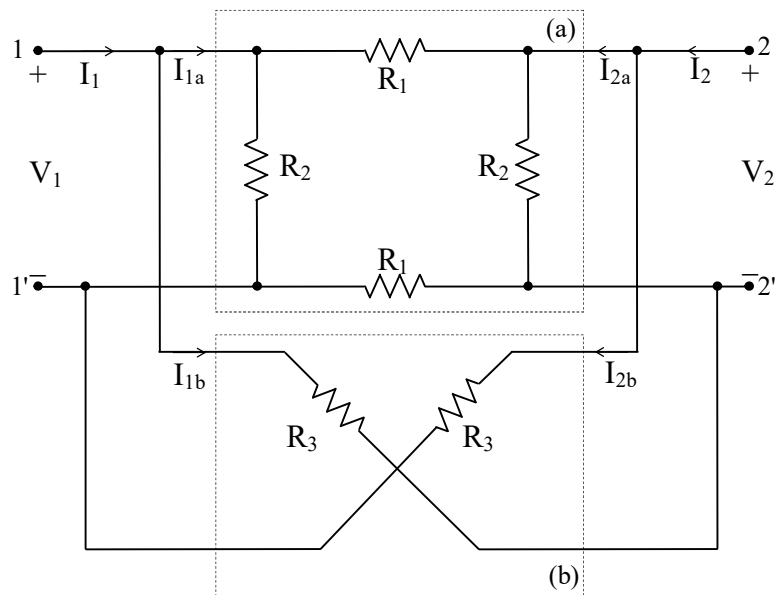


Figura 4

Per il doppio bipolo (a), considerando la porta due in corto circuito, si ha facilmente:

$$G_{11}^{(a)} = \left. \frac{I_1^{(a)}}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} = 4,5 \text{ mS} \quad (17)$$

$$G_{21}^{(a)} = \left. \frac{I_2^{(a)}}{V_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{2R_1} = -2,5 \text{ mS} \quad (18)$$

Per la simmetria del doppio bipolo (a) si ha

$$G_{22}^{(a)} = G_{11}^{(a)} \quad G_{12}^{(a)} = G_{21}^{(a)} \quad (19)$$

Per il doppio bipolo (b), considerando la porta due in corto circuito, si ha facilmente:

$$G_{11}^{(b)} = \left. \frac{I_1^{(b)}}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{2R_3} = 1,25 \text{ mS} \quad (20)$$

$$G_{21}^{(b)} = \left. \frac{I_2^{(b)}}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{2R_3} = 1,25 \text{ mS} \quad (21)$$

Vista la simmetria del doppio bipolo (b) si ha

$$G_{22}^{(b)} = G_{11}^{(b)} \quad G_{12}^{(b)} = G_{21}^{(b)} \quad (22)$$

La matrice delle conduttanze del doppio bipolo composito in parallelo-parallelo è data da:

$$[G] = [G^{(a)}] + [G^{(b)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_3} & -\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_3} \\ -\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_3} & \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,75 & -1,25 \\ -1,25 & 5,75 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Calcolata la matrice delle conduttanze, quella di trasmissione si ottiene mediante le formule:

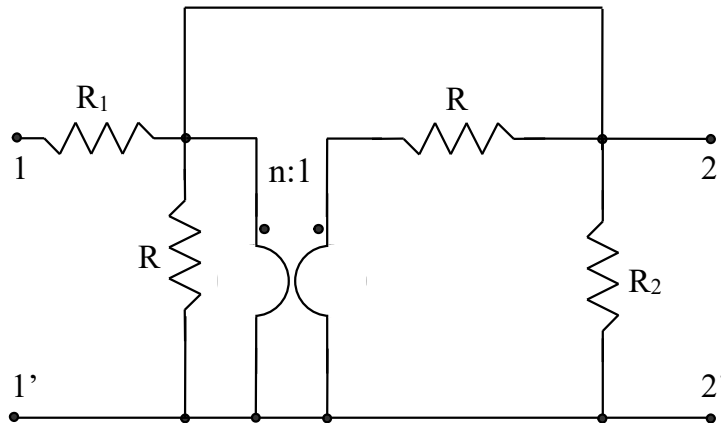
$$A = -\frac{G_{22}}{G_{21}} \quad B = -\frac{1}{G_{21}} \quad C = -\frac{\det[G]}{G_{21}} \quad D = -\frac{G_{11}}{G_{21}} \quad (24)$$

Sostituendo ai parametri di conduttanza i loro valori numerici calcolati precedentemente, si ottengono ancora i risultati trovati in precedenza nelle (4) e (7).

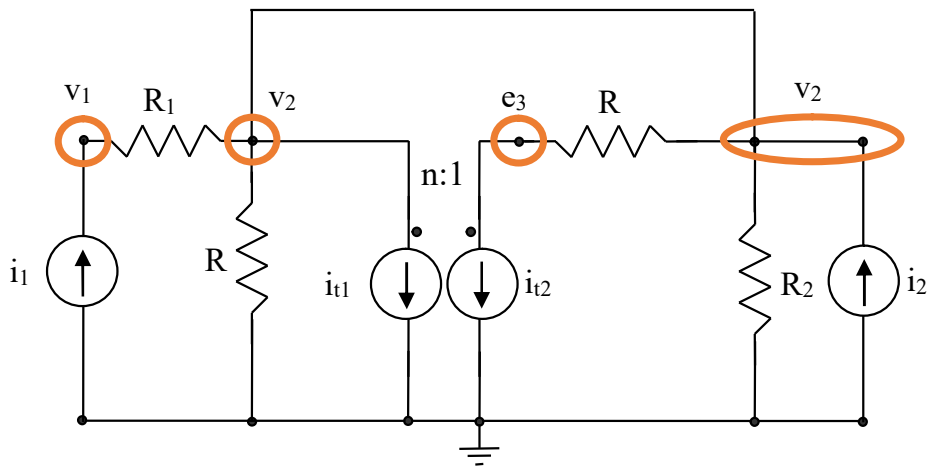
### Esercizio 26b

Calcolare la matrice delle conduttanze [G] del doppio bipolo in figura.

$$R = \frac{1}{4}\Omega, \quad R_1 = \frac{1}{2}\Omega, \quad R_2 = 1\Omega, \quad n = 2$$



Utilizziamo il metodo dei nodi, sostituendo ai lati del trasformatore ideale 2 generatori di corrente:



Il sistema risolvete sarà:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{2}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 - i_{t1} \\ -i_{t2} \end{bmatrix}$$

A cui bisogna aggiungere le equazioni del trasformatore ideale:

$$e_3 = \frac{v_2}{n} \quad i_{t1} = -\frac{i_{t2}}{n}$$

Dalla terza equazione si ha:

$$i_{t2} = \frac{v_2}{R} - \frac{v_2}{Rn} = \frac{n-1}{n} \frac{v_2}{R}$$

e quindi:

$$i_{t1} = -\frac{i_{t2}}{n} = -\frac{1-n}{n^2} \frac{v_2}{R}$$

Sostituendo nella seconda equazione e riordinando le due equazioni, in forma matriciale, si ha:

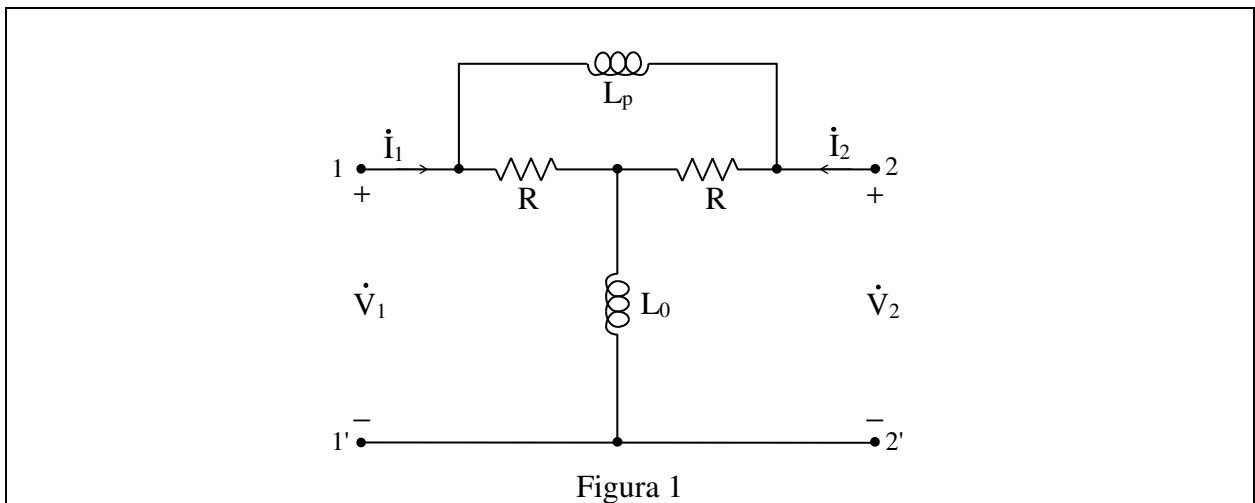
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1-n}{n^2}\right)\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

E quindi:

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1-n}{n^2}\right)\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} S \rightarrow [G] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} S$$

### Esercizio 4.3

Determinare la matrice delle impedenze del doppio bipolo di fig. 1.



### Soluzione 2

Si applichi il metodo delle correnti di anello; dette  $\dot{J}_1$ ,  $\dot{J}_2$  e  $\dot{J}_3$  le correnti (orarie) degli anelli interni, per le LKT si ha:

$$\begin{bmatrix} R + j\omega L_0 & -j\omega L_0 & -R \\ -j\omega L_0 & R + j\omega L_0 & -R \\ -R & -R & 2R + j\omega L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ -\dot{V}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

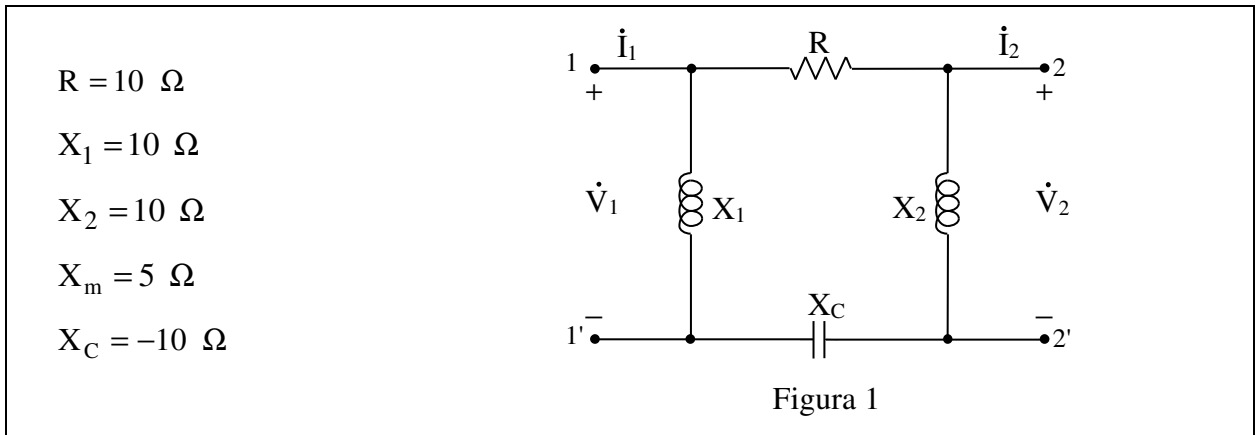
Ricavando  $\dot{J}_3$  dalla terza equazione, sostituendo nelle prime due e considerando che le correnti di ingresso  $\dot{I}_1$  ed  $\dot{I}_2$  del doppio bipolo coincidono rispettivamente con  $\dot{J}_1$  e  $-\dot{J}_2$ , si ha:

$$\begin{bmatrix} R + j\omega L_0 - \frac{R^2}{2R + j\omega L_p} & j\omega L_0 + \frac{R^2}{2R + j\omega L_p} \\ j\omega L_0 + \frac{R^2}{2R + j\omega L_p} & R + j\omega L_0 - \frac{R^2}{2R + j\omega L_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La matrice che premoltiplica il vettore delle correnti è la matrice delle impedenze.

**Esercizio 4.12**

Calcolare la matrice delle ammettenze di corto circuito del doppio bipolo di fig. 1.



Notando che il doppio bipolo è simmetrico, si può ricavare la matrice delle ammettenze di corto circuito calcolandone solo gli elementi  $\dot{Y}_{11}$  ed  $\dot{Y}_{21}$  con la porta 2 in corto circuito. Considerando le correnti  $\dot{I}_1$  ed  $\dot{I}_2$  come due correnti di anello e una terza corrente  $\dot{I}_3$  circolante nell'anello centrale (in senso orario) si ha il sistema:

$$\begin{bmatrix} jX_1 & 0 & -jX_1 \\ 0 & jX_2 & jX_2 \\ -jX_1 & jX_2 & R + j(X_C + X_1 + X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ricavando  $\dot{I}_3$  dalla terza equazione:

$$\dot{I}_3 = \frac{jX_1 \dot{I}_1 - jX_2 \dot{I}_2}{R + j(X_C + X_1 + X_2)} = \frac{(1+j)(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)}{2} \quad (2)$$

e sostituendo nelle prime due, si ha il sistema ridotto:

$$\begin{cases} (5 + j5)\dot{I}_1 - (5 - j5)\dot{I}_2 = \dot{V}_1 \\ -(5 - j5)\dot{I}_1 + (5 + j5)\dot{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Risolto tale sistema, si ottiene:

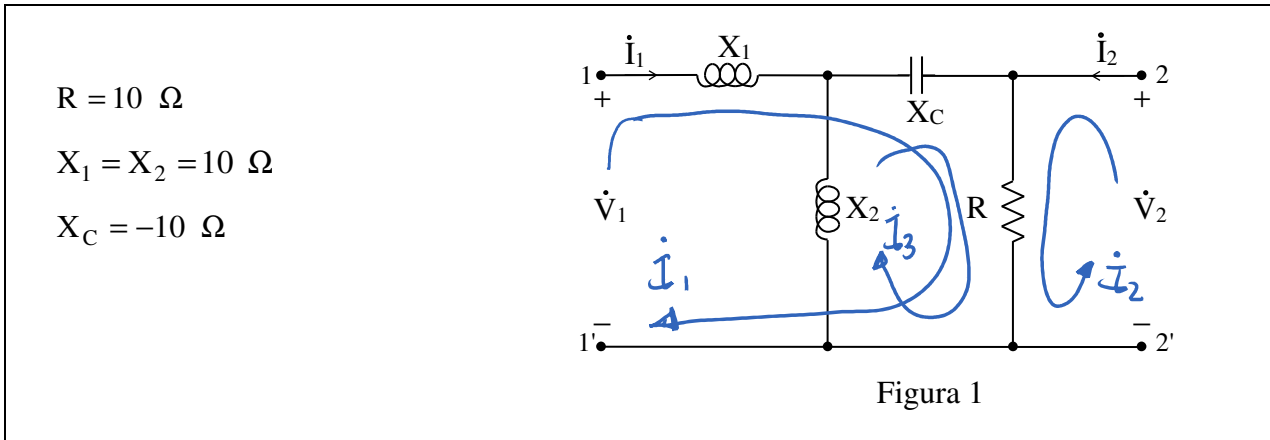
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{(1-j)}{20} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 = -\frac{1+j}{20} \dot{V}_1 \end{cases} \quad (4)$$

da cui:

$$\begin{cases} Y_{11} = Y_{22} = \frac{(1-j)}{20} S \\ Y_{21} = Y_{12} = -\frac{1+j}{20} S \end{cases} \quad (5)$$

### Esercizio 4.13

Ricavare la matrice ibrida inversa del doppio bipolo di fig. 1.



Considerando le correnti  $\dot{I}_1$  ed  $\dot{I}_2$  come correnti di maglia circolanti rispettivamente nelle maglie 1- $X_1$ - $X_C$ - $R$ -1' e 2- $R$ -2' e una terza corrente  $\dot{I}_3$  circolante nella maglia  $X_C$ - $R$ - $X_2$  in senso orario, si ha il sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} R + j(X_1 + X_C) & R & R + jX_C \\ R & R & R \\ R + jX_C & R & R + j(X_2 + X_C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ricavando  $\dot{I}_3$  dalla terza equazione:

$$\dot{I}_3 = -\frac{[R + jX_C]\dot{I}_1 + R\dot{I}_2}{R + j(X_2 + X_C)} = (-1 + j)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 \quad (2)$$

e sostituendo nelle prime due, si ha il sistema ridotto:

$$10 \begin{bmatrix} 1 + j2 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

nel quale la matrice a primo membro è la matrice delle impedenze a vuoto del doppio bipolo.

La matrice ibrida inversa  $[\dot{H}']$ , definita come:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}'_{11} & \dot{H}'_{12} \\ \dot{H}'_{21} & \dot{H}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

si ottiene mediante le formule:

$$\dot{H}'_{11} = \frac{1}{\dot{Z}_{11}} = \frac{1}{50} - j\frac{1}{25} \text{ S} \quad \dot{H}'_{12} = -\frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{11}} = -\frac{2}{5} - j\frac{1}{5} \quad (5)$$

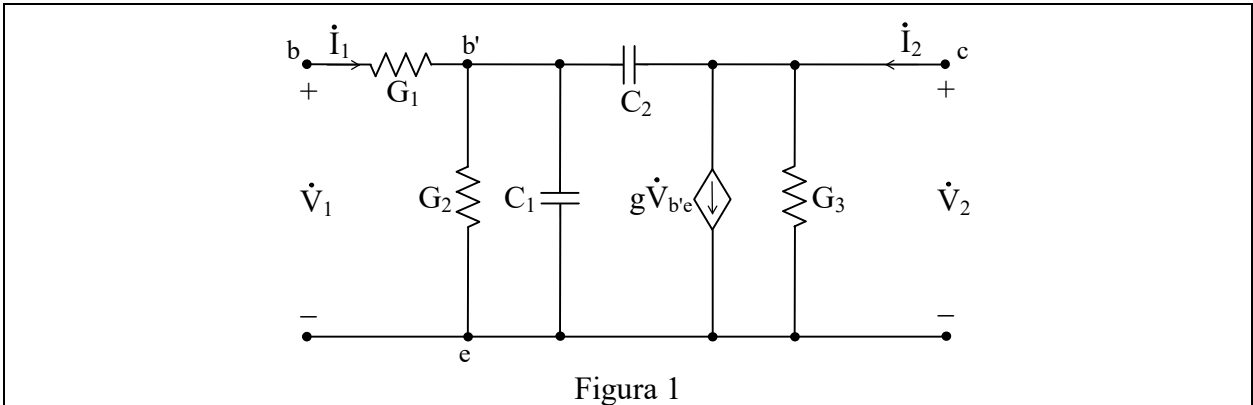
$$\dot{H}'_{21} = \frac{\dot{Z}_{21}}{\dot{Z}_{11}} = \frac{2}{5} + j\frac{1}{5} \quad \dot{H}'_{22} = \frac{\Delta\dot{Z}}{\dot{Z}_{11}} = 2 - j4 \Omega \quad (6)$$

Si noti che la condizione di reciprocità per la matrice delle impedenze si esprime come  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$  e per la matrice ibrida è  $\dot{H}'_{12} = -\dot{H}'_{21}$ . Data l'assenza di generatori pilotati nel doppio bipolo in questione, entrambe le condizioni sono soddisfatte.

### Esercizio 4.2

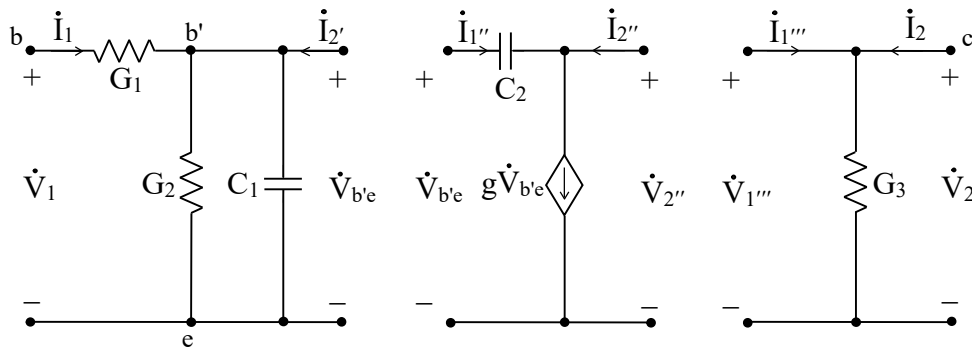
Determinare la matrice di trasmissione inversa del doppio bipolo di fig. 1.

$C_1=10 \text{ mF}$ ,  $C_2=20 \text{ mF}$ ,  $G_1=500 \text{ mS}$ ,  $G_2=2 \text{ S}$ ,  $G_3=200 \text{ mS}$ ,  $g=200 \text{ mS}$ ,  $\omega=20 \text{ rad/s}$ .

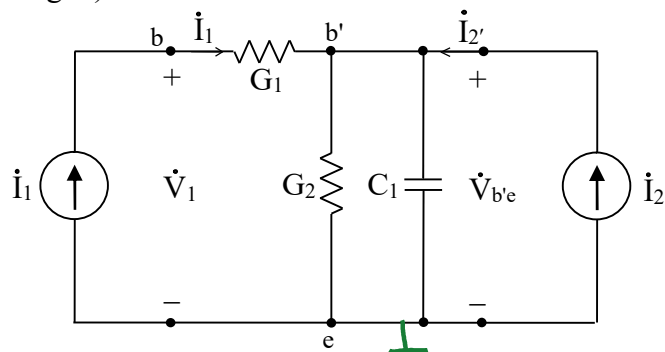


### 1ª Soluzione

Ricaviamo la matrice di trasmissione inversa come il prodotto delle matrici di trasmissione inversa dei 3 doppi bipoli in figura 2.



Per il primo doppio bipolo, alimentando le due porte con generatori di corrente e risolvendo con il metodo dei nodi, si ha (v. fig. 3):



$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + j\omega C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_{b'e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_{2'} \end{bmatrix} \quad (1)$$

e riordinando si ottiene la matrice di trasmissione inversa:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{b'e} \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{G_1} \\ -(G_2 + j\omega C_1) & \frac{G_1 + G_2 + j\omega C_1}{G_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [T_1'] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La matrice di trasmissione inversa del secondo doppio bipolo si può calcolare applicando semplicemente le LK (v. fig. 4):

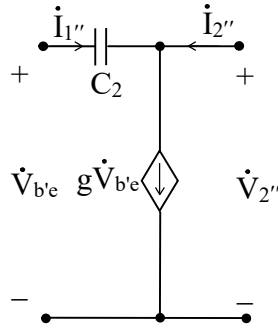


Figura 4

$$\dot{I}_1'' + \dot{I}_2'' = g\dot{V}_{b'e} \quad (3)$$

$$\dot{V}_2'' = \dot{V}_{b'e} - \left( \frac{-j}{\omega C_2} \dot{I}_1'' \right) \quad (4)$$

e riordinando si ottiene la matrice di trasmissione inversa:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2'' \\ -\dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{j}{\omega C_2} \\ -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{b'e} \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = [T_2'] \begin{bmatrix} \dot{V}_{b'e} \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} \quad (5)$$

Anche la matrice di trasmissione inversa del terzo doppio bipolo si può calcolare applicando semplicemente le LK (v. fig. 5):

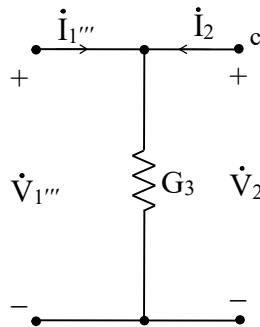


Figura 5

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1''' \quad (6)$$

$$\dot{I}_1''' + \dot{I}_2 = G_3 \dot{V}_1''' \quad (7)$$

e riordinando si ottiene la matrice di trasmissione inversa:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1''' \\ \dot{I}_1''' \end{bmatrix} = [T_3'] \begin{bmatrix} \dot{V}_1''' \\ \dot{I}_1''' \end{bmatrix} \quad (8)$$

Infine, moltiplicando le 3 matrici di trasmissione nell'ordine inverso, si ottiene:

$$\begin{aligned}
[T'] &= [T'_3][T'_2][T'_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{j}{\omega C_2} \\ -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{G_1} \\ -(G_2 + j\omega C_1) & \frac{G_1 + G_2 + j\omega C_1}{G_1} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{C_1 + C_2}{C_2} - \frac{jG_2}{\omega C_2} & -\frac{C_1 + C_2}{C_2 G_1} + j\frac{G_1 + G_2}{\omega C_2 G_1} \\ -g - G_2 - \frac{C_1 + C_2}{C_2} G_3 - j\left(\omega C_1 - \frac{G_2 G_3}{\omega C_2}\right) & \frac{g + G_1 + G_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} G_3 + j\left[\omega C_1 - \frac{(G_1 + G_2) G_3}{\omega C_2}\right]}{G_1} \end{bmatrix} \quad (9)
\end{aligned}$$

e, sostituendo i valori numerici si ha:

$$[T'] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - j5 & -3 + j\frac{25}{2} \Omega \\ -\frac{5}{2} + j\frac{4}{5} S & 6 - j\frac{21}{10} \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 2ª Soluzione

La matrice di trasmissione inversa del doppio bipolo può essere ricavata, anche, studiando le due reti che si ottengono considerando la porta 1 a vuoto e in corto circuito (anche se questo metodo, di solito, è meno efficiente del precedente).

Con la porta 1 a vuoto (ossia con  $\dot{I}_1 = 0$ ), adoperando il metodo dei potenziali di nodo si ha:

$$\begin{cases} (G_2 + j\omega C_1)\dot{V}_1 + j\omega C_2(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) = 0 \\ j\omega C_2(\dot{V}_2 - \dot{V}_1) + G_3\dot{V}_2 = \dot{I}_2 - g\dot{V}_{b'e} \end{cases} \quad (11)$$

Dalla prima delle (11) si ha immediatamente:

$$\dot{A}' = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} \right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} - j\frac{G_2}{\omega C_2} \quad (12)$$

Dalla seconda delle (11), considerando la (2) e che  $\dot{V}_{b'e} = \dot{V}_1$ , si ha:

$$\dot{C}' = \left. \frac{-\dot{I}_2}{\dot{V}_1} \right|_{\dot{I}_1=0} = -g - G_2 - \frac{C_1 + C_2}{C_2} G_3 - j\left(\omega C_1 - \frac{G_2 G_3}{\omega C_2}\right) \quad (13)$$

Con la porta 1 in corto circuito (ossia con  $\dot{V}_1 = 0$ ), scelto ancora 'e' come nodo di riferimento, il metodo dei potenziali di nodo conduce ad equazioni deducibili dalle precedenti sostituendo al posto di  $G_2$  il parallelo di  $G_1$  e  $G_2$ . Essendo inoltre  $\dot{V}_{b'e} = -\dot{I}_1 / G_1$ , dalla prima si ha:

$$\dot{B}' = \left. \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{V}_1=0} = -\frac{(C_1 + C_2)}{C_2 G_1} + j\frac{G_1 + G_2}{\omega C_2 G_1} \quad (14)$$

mentre dalla seconda, per la (5), si ha:

$$\dot{D}' = \left. \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{V}_1=0} = \frac{g + G_1 + G_2 + (1 + C_1/C_2)G_3}{G_1} + j\frac{1}{G_1} \left( \omega C_1 - \frac{(G_1 + G_2)G_3}{\omega C_2} \right) \quad (15)$$

Si noti che le espressioni di  $\dot{B}'$  e  $\dot{D}'$  possono essere ottenute rispettivamente da quelle di  $\dot{A}'$  e  $\dot{C}'$  moltiplicando queste per  $-1/G_1$  e sostituendo  $G_2$  con  $G_1 + G_2$ .

Infine, a parziale verifica della correttezza dei risultati, si può verificare che, posto  $g=0 S$ , si ha

$$\det[\dot{T}'] = \dot{A}'\dot{D}' - \dot{B}'\dot{C}' = 1 \quad (16)$$