Esercitazioni di Elettrotecnica

del corso di recupero per il CdL in Ingegneria Informatica

Esercitazioni 6 e 7

Analisi in transitorio di reti del secondo ordine con generatori di forma d'onda costante mediante il metodo operazionale di Laplace.

Esercizio 1.6

Il circuito di fig. 1 è in regime costante al tempo $t = 0$*, istante in cui l'interruttore* S *chiude. Determinare la corrente nell'induttore per* $t > 0$.

$V_g = 250\,\mathrm{V}$

$L = 0{,}1\ \mathrm{H}$

$C = 10\ \mu\mathrm{F}$

$R_1 = 25\ \Omega$

$R_2 = 600\ \Omega$

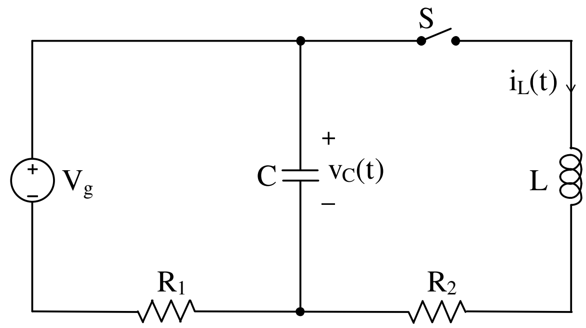


Figura 1

Per t<0 nel circuito non circola alcuna corrente, per cui le condizioni iniziali sono immediatamente calcolate come:

$$v_C(0-) = V_g = 250\ \mathrm{V} \qquad\qquad i_L(0-) = 0\ \mathrm{A} \tag{1}$$

Mediante il metodo delle correnti di maglia nel dominio delle trasformate di Laplace (v. fig. 2); si ha il sistema:

$$\left(R_1 + \frac{1}{sC}\right) J_1(s) - \frac{1}{sC} J_2(s) = \frac{1}{s} V_g - \frac{1}{s} v_C(0-) \tag{2}$$

$$-\frac{1}{sC} J_1(s) + \left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right) J_2(s) = \frac{1}{s} v_c(0-) \tag{3}$$

Essendo $v_C(0-) = V_g = 250\ \mathrm{V}$ e utilizzando i valori numerici proposti, si ha:

$$J_2(s) = 2500 \frac{s + 4 \cdot 10^3}{(s^2 + 10^4 s + 25 \cdot 10^6)\, s} \tag{4}$$

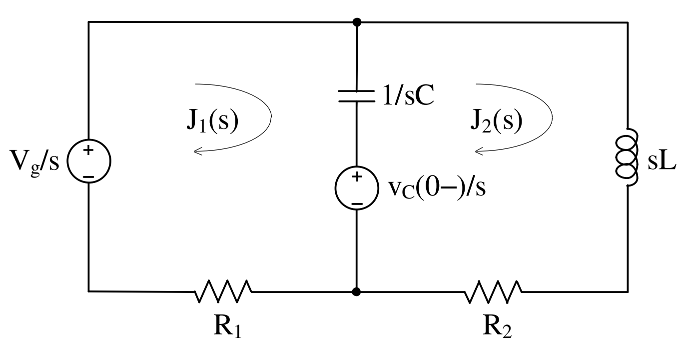


Figura 2

Poiché le radici del denominatore sono $s_1 = s_2 = -5 \cdot 10^3$ Hz ed $s_3 = 0$ Hz, $J_2(s)$ si può sviluppare in frazioni parziali come:

$$J_2(s) = \frac{A}{s + 5 \cdot 10^3} + \frac{B}{(s + 5 \cdot 10^3)^2} + \frac{C}{s} \tag{5}$$

Le costanti A, B e C si possono calcolare come segue:

$$B = \left[J_2(s) \cdot (s + 5 \cdot 10^3)^2\right]_{s=-5 \cdot 10^3} = 500 \tag{6}$$

$$C = \left[J_2(s) \cdot s\right]_{s=0} = 0{,}4 \tag{7}$$

$$A = \left[\left(J_2(s) - \frac{B}{(s + 5 \cdot 10^3)^2} - \frac{C}{s}\right)(s + 5 \cdot 10^3)\right]_{s=-4 \cdot 10^3} = -0{,}4 \tag{8}$$

Sostituendo questi valori nella (5) ed antitrasformando si ottiene:

$$j_2(t) = i_L(t) = \left(-0{,}4 + 500t\right) e^{-5000t} + 0{,}4 \ \text{A} \tag{9}$$

Il grafico della corrente nell'induttore è riportato in fig. 3.

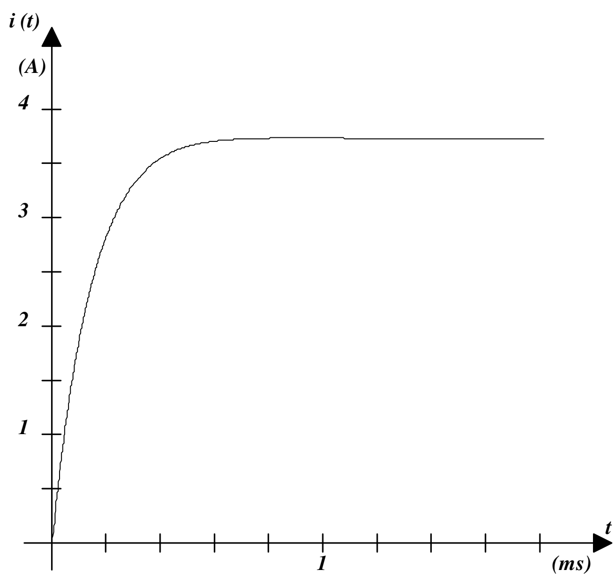


Figura 3

Esercizio 36ter

(Ing. Elettrica

Compito del 8 febbraio 2011 - Quesito 1)

La rete in fig.1 è a regime nell'istante t=0s, istante in cui l'interruttore K chiude. Si calcoli l'andamento temporale della corrente $i_3(t)$ per t≥0s.

$I_{g1} = 9A$, $V_{g2} = 6A$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $C = 1/6\ F$, $L = 6\ H$, $n_1/ n_2 = 1/2$.

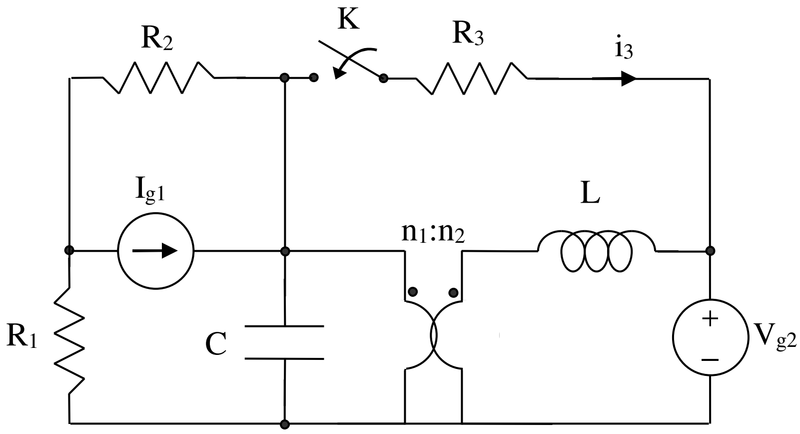


fig.1

Poiché, prima della chiusura dell'interruttore la rete è a regime costante, il calcolo delle condizioni iniziali $V_0 = v_C(0^-)$ e $I_0 = i_L(0^-)$ può essere effettuato mediante la rete in fig.2:

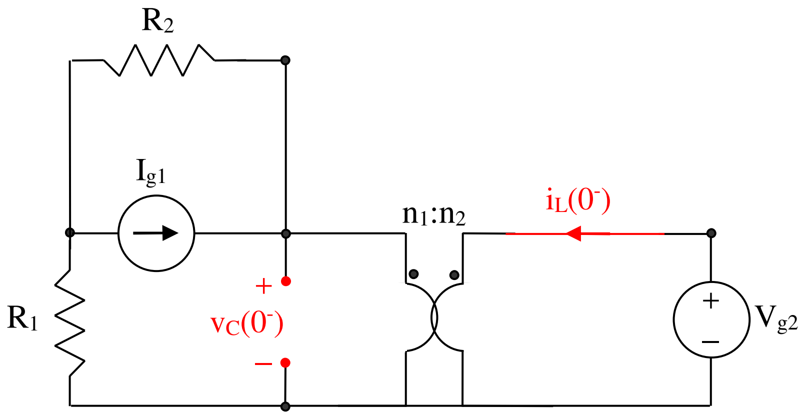


fig. 2

Per il calcolo della $v_C(0^-)$, il generatore di tensione V_{g2} può essere riportato al primario usando le equazioni del trasformatore ideale:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_C(0^-)}{V_{g2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad v_C(0^-) = V'_{g2} = \frac{n_1}{n_2} V_{g2} \quad \Rightarrow \quad v_C(0^-) = 3\,V \tag{1}$$

Ottenendo la rete in fig.3:

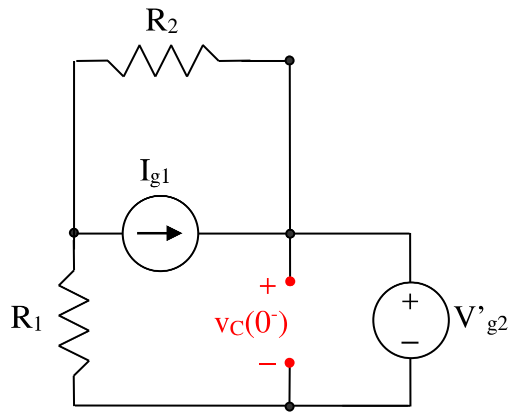


fig. 3

Trasformando il lato Norton nell'equivalente lato Thevenin si ottiene la rete in fig.4:

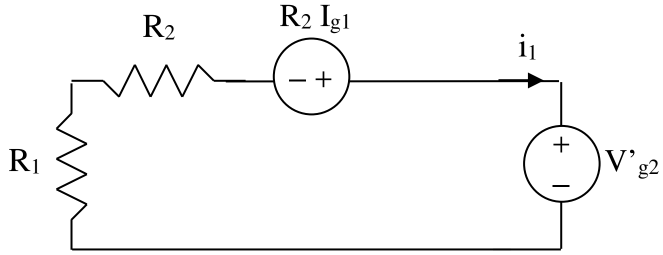


fig. 4

mediante la quale è semplice calcolare la corrente i_1 che equivale alla corrente al primario del trasformatore della fig. 2:

$$i_1 = \frac{R_2 I_{g1} - V'_{g2}}{R_1 + R_2} \tag{2}$$

Conoscendo la corrente i_1, si può calcolare la corrente $i_L(0^-)$ usando le equazioni del trasformatore ideale:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{i_1}{i_L(0^-)} = -\frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad i_L(0^-) = -\frac{n_1}{n_2} i_1 = -\frac{n_1}{n_2}\frac{R_2 I_{g1} - V'_{g2}}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad i_L(0^-) = -\frac{5}{2} \mathrm{A} \tag{3}$$

La rete per t>0, con l'interruttore T chiuso, la risolviamo nel dominio di Laplace, riportandola a stato zero mettendo in evidenza le condizioni iniziali mediante l'inserimento di opportuni generatori indipendenti (come evidenziato in fig.5) e trasformando generatori indipendenti e impedenze:

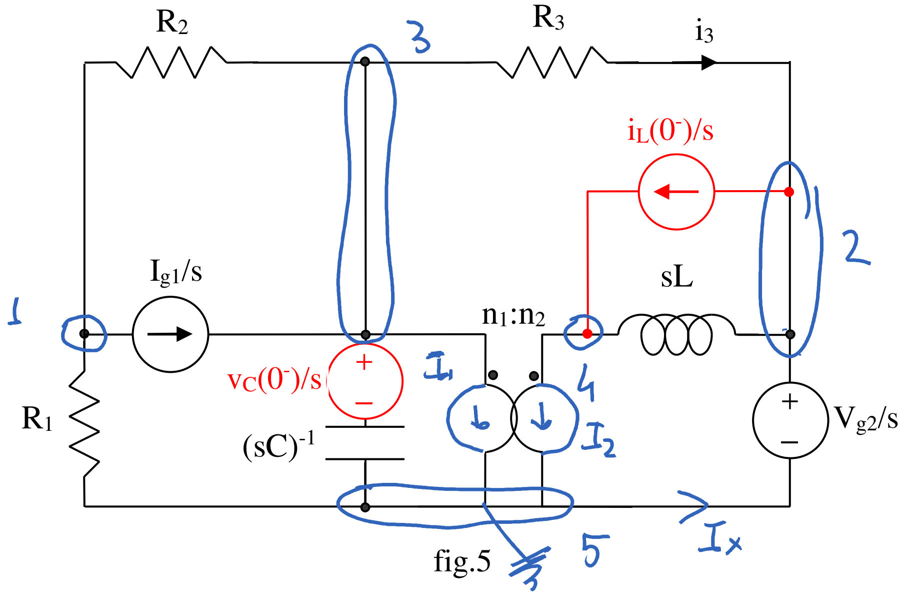


fig.5

Applicando il metodo dei nodi alla rete di fig.5, si ottiene il seguente sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+sC & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sL} & 0 & \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ \frac{V_{g2}}{s} \\ E_3(s) \\ E_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{I_{g1}}{s} \\ -\frac{i_L(0^-)}{s}+I_x(s) \\ \frac{I_{g1}}{s}+Cv_C(0^-)-I_1(s) \\ -I_2(s)+\frac{i_L(0^-)}{s} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a cui vanno aggiunte le equazioni del trasformatore ideale:

$$\begin{cases} \frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{E_3(s)}{E_4(s)}=\frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad E_4(s)=\frac{n_2}{n_1}E_3(s) \\ \frac{I_1(s)}{I_2(s)}=-\frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad I_1(s)=-\frac{n_2}{n_1}I_2(s) \end{cases} \tag{5}$$

Il sistema (4) può essere ridotto al seguente sistema 3x3:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+sC & -\frac{n_2}{n_1} \\ 0 & -\frac{1}{sL}\frac{n_2}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_3(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{I_{g1}}{s} \\ \frac{I_{g1}}{s}+Cv_C(0^-)+\frac{1}{R_3}\frac{V_{g2}}{s} \\ \frac{i_L(0^-)}{s}+\frac{1}{sL}\frac{V_{g2}}{s} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Risolvendo il sistema per trovare $E_3(s)$ otteniamo:

$$E_3(s) = \frac{\begin{Vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{I_{g1}}{s} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{I_{g1}}{s}+Cv_C\left(0^-\right)+\frac{1}{R_3}\frac{V_{g2}}{s} & -\frac{n_2}{n_1} \\ 0 & \frac{i_L\left(0^-\right)}{s}+\frac{1}{sL}\frac{V_{g2}}{s} & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+sC & -\frac{n_2}{n_1} \\ 0 & -\frac{1}{sL}\frac{n_2}{n_1} & 1 \end{Vmatrix}} \tag{7}$$

e sostituendo i valori numerici si ha:

$$E_3(s) = \frac{\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{s} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{s}+\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2s}+\frac{1}{s^2} & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}+\frac{s}{6} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3s} & 1 \end{Vmatrix}} = 3\frac{s^2+6s+4}{s\left(s^2+4s+4\right)} \tag{8}$$

Infine, la corrente cercata è data da:

$$I_3(s) = \frac{E_3(s)-\frac{V_{g2}}{s}}{R_3} = -\frac{s^2+2s+4}{s\left(s^2+4s+4\right)} = -\frac{s^2+2s+4}{s(s+2)^2} = \frac{k_{11}}{s}+\frac{k_{21}}{(s+2)^2}+\frac{k_{22}}{(s+2)} \tag{9}$$

Per il calcolo dei coefficienti k_{ij}, riferiti all'i-esimo polo con molteplicità m_i, usiamo la formula generale (avendo avuto l'accortezza di ordinare i coefficienti dei poli multipli per potenze decrescenti del denominatore):

$$k_{ij} = \frac{1}{(1-j)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}F(s)\left(s-p_i\right)^{m_i}\Bigg|_{s=p_i} \qquad j=1,\cdots,m_i \tag{10}$$

e quindi:

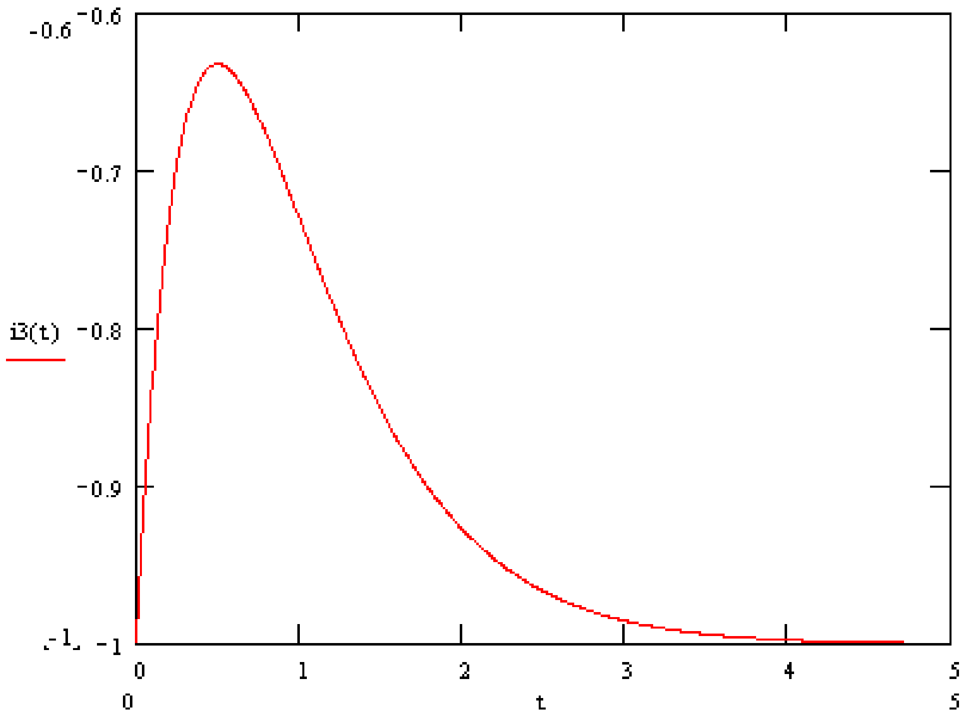
$$k_{11} = -\left.\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = -\frac{4}{(2)^2} = -1 \tag{11}$$

$$k_{21} = -\left.\frac{s^2+2s+4}{s}\right|_{s=-2} = -\frac{4-4+4}{-2} = 2 \tag{12}$$

$$k_{22} = \frac{d}{ds}\left.\left(-\frac{s^2+2s+4}{s}\right)\right|_{s=-2} = -\left.\left(\frac{2s^2+2s-s^2-2s-4}{s^2}\right)\right|_{s=-2} = -\left.\left(\frac{s^2-4}{s^2}\right)\right|_{s=-2} = 0 \tag{13}$$

Antitrasformando si ha:

$$i_3(t) = -1 + (2t+0)e^{-2t} = 2te^{-2t} - 1\,A \quad per \;\; t \geq 0\,s \tag{14}$$



<u>Considerazioni finali</u>

Risolvendo lo stesso esercizio con il metodo delle equazioni di stato, nel dominio del tempo, si risolvono sistemi di equazioni ridotti, cioè di dimensioni inferiori al sistema 3x3 (6).

Esame di ELETTROTECNICA del 28-07-2015

C.d.L. Ingegneria Industriale, C.d.L. Ingegneria Informatica

L'interruttore S chiude quando il circuito in fig.1 è a regime. Calcolare la corrente $i_0(t)$.

$$\left\langle \begin{matrix} i_0(t)=8e^{-12t}\cos(16t+\pi)+24\ A \\ \begin{bmatrix} i_L(t)=4\sqrt{10}e^{-12t}\cos(16t-0.322)-12\ A=12e^{-12t}\cos(16t)+4e^{-12t}\sin(16t)-12\ A \\ v_C(t)=4\sqrt{10}e^{-12t}\cos(16t+1.249)+36\ V=4e^{-12t}\cos(16t)-12e^{-12t}\sin(16t)+36\ V \end{bmatrix} \end{matrix} \right\rangle$$

$R = 1\ \Omega$, $C = 50\ mF$, $L = 50\ mH$, $V_g = 60\ V$

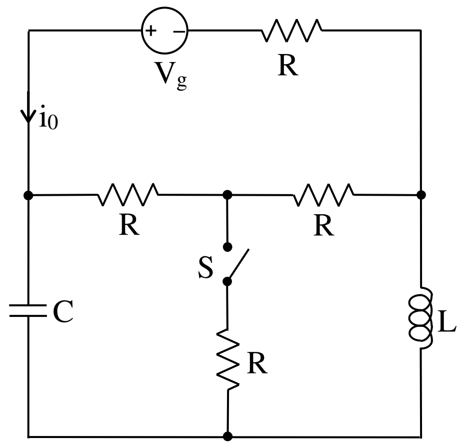


fig.1

Poiché, prima della chiusura dell'interruttore la rete è a regime costante, il calcolo delle condizioni iniziali $V_0 = v_C(0^-)$ e $I_0 = i_L(0^-)$ può essere effettuato mediante la rete in fig.2:

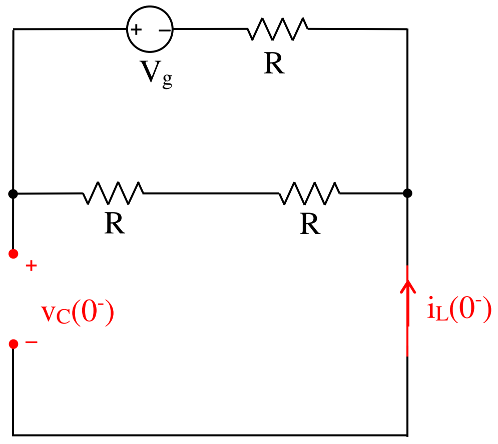


fig. 2

per cui:

$$i_L(0^-)=0\ A \ \text{ e } \ v_C(0^-)=\frac{2}{3}V_g=40\ V \qquad (1)$$

La rete per t>0, con l'interruttore S chiuso, la risolviamo nel dominio di Laplace, riportandola a stato zero mettendo in evidenza le condizioni iniziali mediante l'inserimento di opportuni generatori indipendenti (come evidenziato in fig.3) e trasformando generatori indipendenti e impedenze:

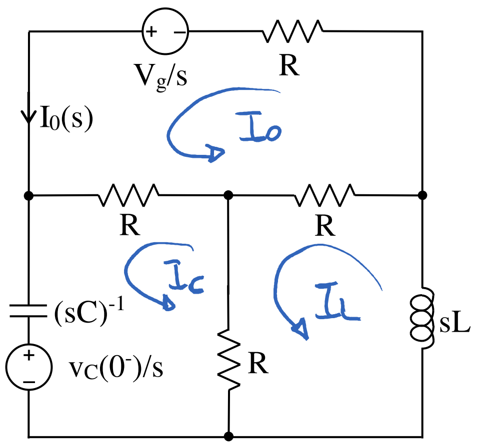


fig.3

Applicando il metodo degli anelli alla rete di fig.3, si ottiene il seguente sistema risolvente:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 2R+\dfrac{1}{sC} & -R \\ -R & -R & 2R+sL \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ I_C \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{V_g}{s} \\ -\dfrac{v_C(0^-)}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Risolvendo il sistema (2) per trovare $I_0(s)$ otteniamo:

$$I_0(s) = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{V_g}{s} & -R & -R \\ -\dfrac{v_C(0^-)}{s} & 2R+\dfrac{1}{sC} & -R \\ 0 & -R & 2R+sL \end{bmatrix}}{\left\|\begin{matrix} 3R & -R & -R \\ -R & 2R+\dfrac{1}{sC} & -R \\ -R & -R & 2R+sL \end{matrix}\right\|} \tag{3}$$

e sostituendo i valori numerici si ha:

$$I_0(s)=\frac{\left\|\begin{bmatrix}\frac{60}{s} & -1 & -1\\ -\frac{40}{s} & 2+\frac{20}{s} & -1\\ 0 & -1 & 2+\frac{s}{20}\end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2+\frac{20}{s} & -1\\ -1 & -1 & 2+\frac{s}{20}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{16s^2+480s+9600}{s\left(s^2+24s+400\right)} \tag{4}$$

da cui si ha:

$$I_0(s)=\frac{k_{11}}{s}+\frac{k_{21}}{(s+12+j16)}+\frac{k_{21}^*}{(s+12-j16)} \tag{5}$$

Per il calcolo dei coefficienti k_{ij}, riferiti all'i-esimo polo con molteplicità m_i, usiamo la formula generale (avendo avuto l'accortezza di ordinare i coefficienti dei poli multipli per potenze decrescenti del denominatore):

$$k_{ij}=\frac{1}{(1-j)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}F(s)(s-p_i)^{m_i}\bigg|_{s=p_i} \qquad j=1,\cdots,m_i \tag{6}$$

e quindi:

$$k_{11}=\frac{16s^2+480s+9600}{\left(s^2+24s+400\right)}\bigg|_{s=0}=\frac{9600}{400}=24 \tag{7}$$

$$k_{21}=\frac{16s^2+480s+9600}{s(s+12-j16)}\bigg|_{s=-12-j16}=-4=4e^{j\pi} \tag{8}$$

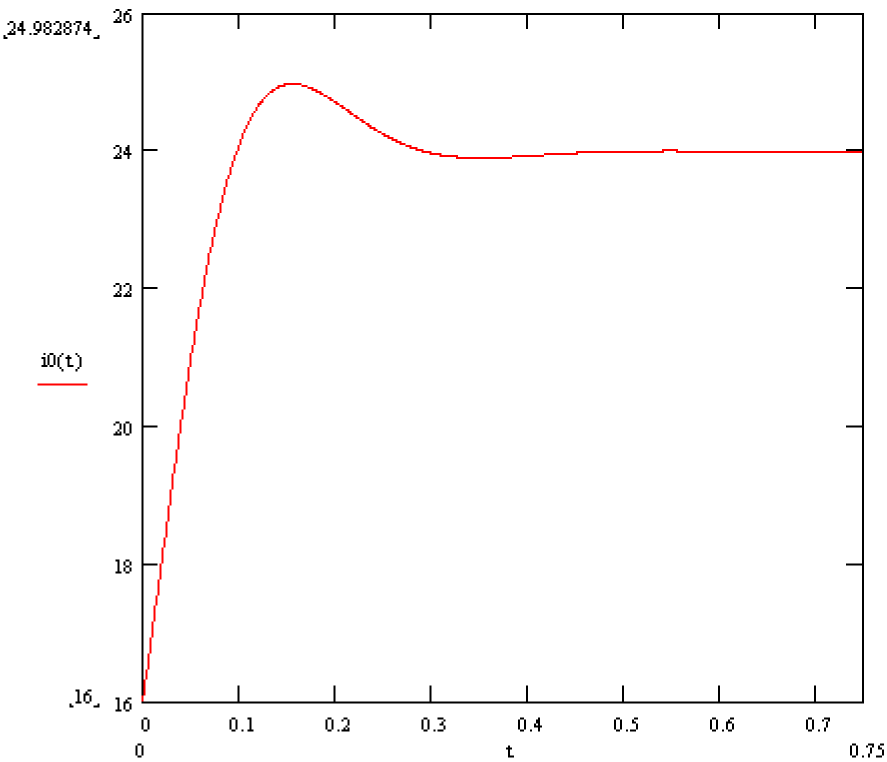
$$k_{21}^*=-4=4e^{-j\pi} \tag{9}$$

da cui si ha:

$$I_0(s)=\frac{24}{s}+\frac{4e^{j\pi}}{(s+12+j16)}+\frac{4e^{-j\pi}}{(s+12-j16)} \tag{9}$$

Antitrasformando si ha:

$$\begin{aligned} i_0(t) &= 24+4\left(e^{j\pi}e^{-12t-j16t}+e^{-j\pi}e^{-12t+j16t}\right)=24+8e^{-12t}\left(\frac{e^{-j(16t-\pi)}+e^{j(16t-\pi)}}{2}\right)= \\ &=8e^{-12t}\cos(16t-\pi)+24\ \text{A} \quad \text{per}\ \ t\geq 0\ \text{s}\end{aligned} \tag{10}$$



24.982874
26
24
22
20
18
16
16
i0(t)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0
t
0.75