

Esame di ELETTROTECHNICA del 1-3-2005
C.d.L. Ingegneria Informatica (N.O. 2003 m-z)
Esercizio n.1

Sia data la rete di figura 1. Sapendo che detta rete è a regime prima dell'istante $t=0$ s, in cui avviene la chiusura dell'interruttore K, si calcoli la corrente $i_2(t)$ per $t \geq 0$.

$$\langle i_2(t) = (8 \cdot e^{-10t} + 27) \text{ A per } t \geq 0 \text{ s} \rangle$$

$$C = \frac{1}{30} \text{ F, } R_\alpha = \frac{5}{3} \Omega, R = 5 \Omega, V_g = 45 \text{ V.}$$

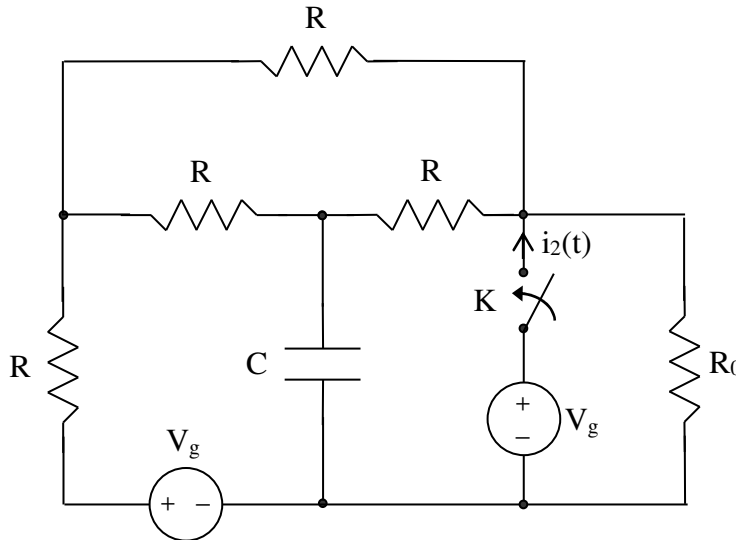


fig. 1

Soluzione

Preliminarmente occorre calcolare la condizione iniziale relativa alla tensione sul condensatore.

Il circuito per $t=0^-$ è quello di fig.2, in cui il condensatore è stato sostituito da un circuito aperto essendo la rete a regime costante:

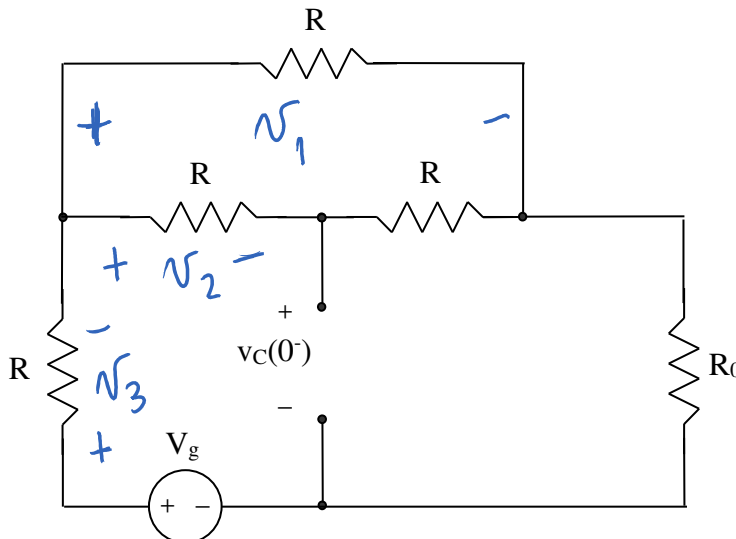


Fig. 2

Il circuito presenta un solo nodo, per cui può essere risolto mediante la seguente equazione, in cui R_1 non compare perché in serie a un generatore di corrente:

La tensione $v_C(0^-)$ può essere calcolata come:

$$v_C(0^-) = V_g - v_2 - v_3 = V_g - \frac{V_1}{2} - v_3 \quad (1)$$

in cui:

$$v_1 = \frac{\frac{2}{3}R}{R + \frac{2}{3}R + R_0} V_g = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{5}{3}R + R_0} V_g \quad (2)$$

$$v_3 = \frac{R}{\frac{5}{3}R + R_0} V_g \quad (3)$$

e quindi:

$$v_C(0^-) = \left(1 - \frac{R}{5R + 3R_0} - \frac{3R}{5R + 3R_0}\right) V_g = \frac{R + 3R_0}{5R + 3R_0} V_g \quad (4)$$

sostituendo i valori numerici:

$$v_C(0^-) = 15 \text{ V} \quad (5)$$

Chiuso l'interruttore, applichiamo il teorema di Thevenin ai capi del condensatore. Calcoliamo la resistenza equivalente di Thevenin risolvendo il circuito di fig.3:

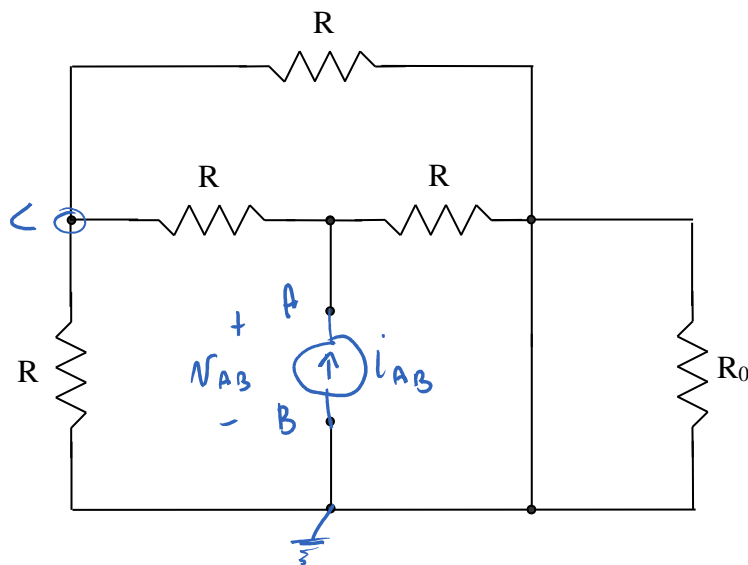


Fig. 3

in cui è stato inserito il generatore di prova i_{AB} al fine di calcolare la R_{Th} mediante la definizione:

$$R_{Th} = \frac{V_{AB}}{i_{AB}} \quad (5)$$

Scegliendo il nodo B come riferimento il sistema risolvete con il metodo dei nodi è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{3}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{AB} \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{AB} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

da cui si ottiene:

$$V_{AB} = \frac{\begin{bmatrix} i_{AB} & -\frac{1}{R} \\ 0 & \frac{3}{R} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{3}{R} \end{bmatrix}} = \frac{3}{5} Ri_{AB} \quad (7)$$

per cui si ha:

$$R_{Th} = \frac{V_{AB}}{i_{AB}} = \frac{3}{5} R \quad (8)$$

e quindi:

$$R_{Th} = 3 \Omega \quad (9)$$

E' importante notare che si sarebbe pervenuti allo stesso risultando trasformando il triangolo di resistenze in alto in una stella e procedendo per riduzioni serie e parallelo.

Calcoliamo adesso la tensione del generatore equivalente di Thevenin, V_{Th} , risolvendo il circuito di fig.4, in cui il condensatore è sostituito da un circuito aperto e la resistenza R_0 eliminata perché in parallelo a un generatore di tensione:

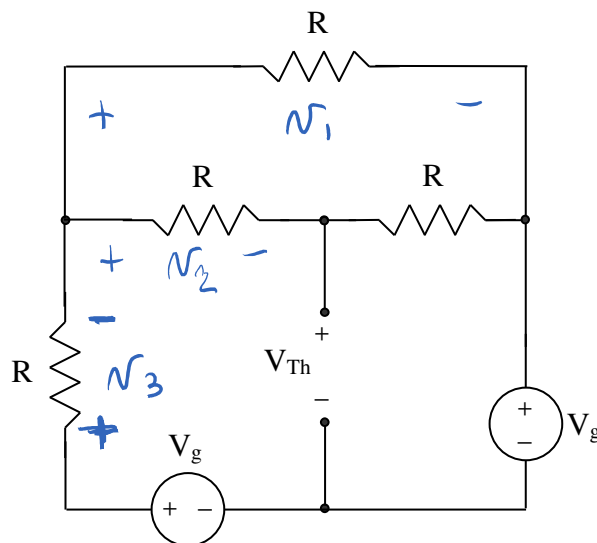


Fig. 4

La tensione V_{Th} può essere calcolata come:

$$V_{Th} = V_g - v_2 - v_3 = V_g - \frac{v_1}{2} - v_3 \quad (10)$$

in cui:

$$v_1 = \frac{\frac{2}{5}R}{\frac{3}{5}R} (V_g - V_g) = 0 \text{ V} \quad (11)$$

$$v_3 = \frac{R}{\frac{5}{3}R} (V_g - V_g) = 0 \text{ V} \quad (12)$$

e quindi:

$$V_{Th} = 45 \text{ V} \quad (13)$$

Possiamo scrivere l'espressione della $v_C(t)$:

$$v_C(t) = [v_C(0^-) - V_{Th}] e^{-\frac{1}{CR_{Th}} t} + V_{Th} \quad (14)$$

e sostituendo i valori trovati:

$$v_C(t) = -30 e^{-10t} + 45 \text{ V} \quad (15)$$

Infine, calcoliamo adesso la corrente i_2 risolvendo il circuito di fig. 5 in cui è stato applicato il teorema di sostituzione mettendo al posto del condensatore un generatore di tensione $v_C(t)$:

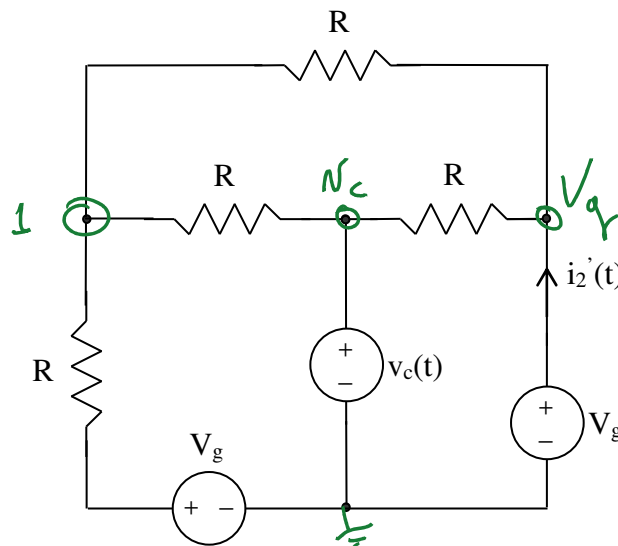


Fig. 5

Il circuito presenta un solo potenziale di nodo incognito, per cui può essere risolto mediante la seguente equazione:

$$\frac{3}{R} e_1 = \frac{V_g}{R} + \frac{v_C}{R} + \frac{V_g}{R} = \frac{v_C + 2V_g}{3} \quad (16)$$

e quindi:

$$i_2' = \frac{V_g - v_C}{R} + \frac{V_g - e_1}{R} = \frac{1}{R} \left(V_g - v_C + V_g - \frac{v_C}{3} - \frac{2}{3} V_g \right) = -\frac{4v_C}{3R} + \frac{4V_g}{3R} \quad (17)$$

per cui, considerando anche il contributo della corrente che scorre nel lato con la resistenza R_0 :

$$i_2 = i_2' + \frac{V_g}{R_0} = -\frac{4v_C}{3R} + \frac{4V_g}{3R} + \frac{V_g}{R_0} \quad (18)$$

$$i_2 = 8 e^{-10t} + 27 \text{ A} \quad (19)$$

Esame di ELETTRONICA del 19-6-2008
 C.d.L. Ingegneria Informatica (N.O. 2003 m-z)
 Esercizio n.1

La rete in figura 1 è a regime prima dell'istante $t=0$ s, in cui avviene la chiusura dell'interruttore K. Calcolare l'andamento della corrente $i_L(t)$ per $t>0$.

$$\left\langle i_L(t) = -0,4 e^{-\frac{10}{3}t} + 1,5 \text{ A} \right\rangle$$

$$R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 5\Omega, \quad R_3 = 2\Omega, \quad L = 1\text{H}, \quad g_m = 0,2\text{S}, \quad V_g = 5\text{V}, \quad I_g = 0,5\text{A}.$$

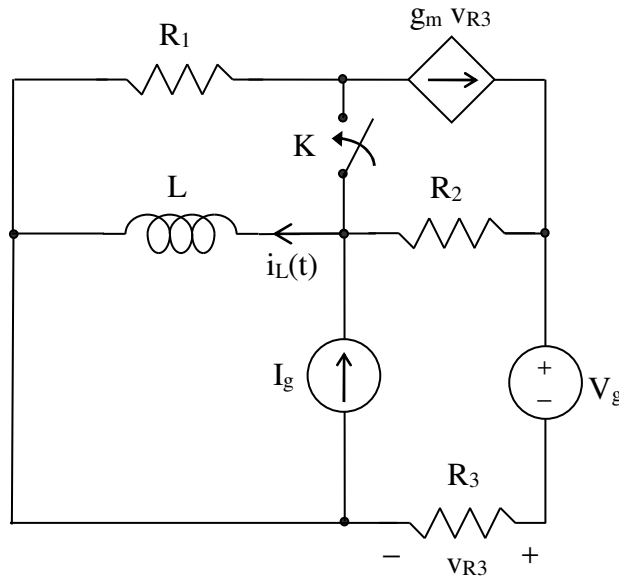


Fig. 1

Soluzione

Preliminarmente occorre calcolare la condizione iniziale relativa alla corrente nell'induttore. Il circuito per $t=0^-$ è quello di fig.2, in cui l'induttore è stato sostituito da un corto circuito essendo la rete a regime costante:

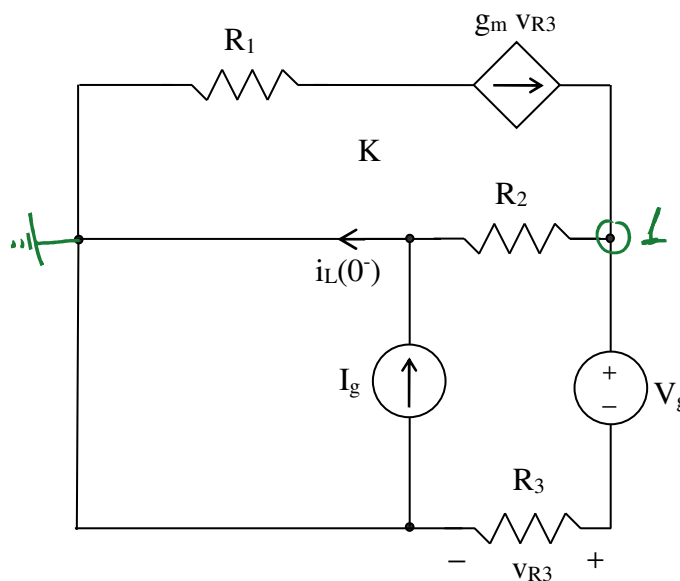


Fig. 2

Il circuito presenta un solo nodo, per cui può essere risolto mediante la seguente equazione, in cui R_1 non compare perché in serie a un generatore di corrente:

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)e_1 = \frac{V_g}{R_3} + g_m v_{R3} = \frac{V_g}{R_3} + g_m (e_1 - V_g) \quad (1)$$

Riordinando, si ha:

$$e_1 = \frac{\left(\frac{1}{R_3} - g_m\right)}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - g_m\right)} V_g \quad (2)$$

ed essendo:

$$i_L(0^-) = \frac{e_1}{R_2} + I_g \quad (3)$$

si ha:

$$i_L(0^-) = \frac{3/5}{5} 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{10} \text{ A} \quad (4)$$

Chiuso l'interruttore, applichiamo il teorema di Norton ai capi dell'induttore. Calcoliamo la resistenza equivalente di Norton risolvendo il circuito di fig.3:

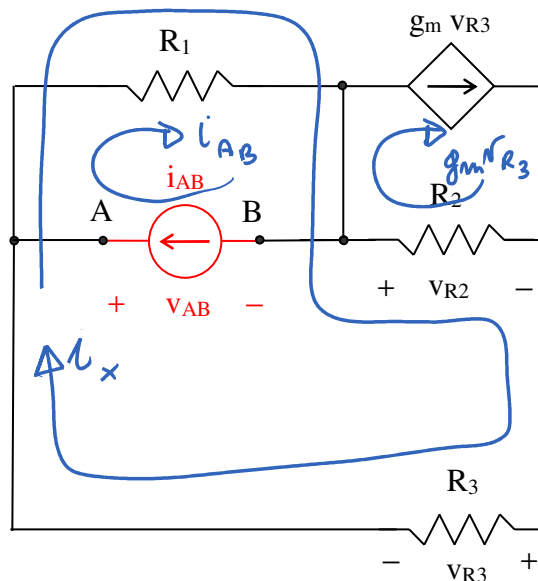


Fig. 3

A causa della presenza del generatore pilotato non è possibile calcolare la R_{No} con semplici riduzioni serie e parallelo, per cui è stato inserito il generatore di prova i_{AB} al fine di calcolare la R_{No} mediante la definizione:

$$R_{No} = \frac{V_{AB}}{i_{AB}} \quad (5)$$

Scegliendo le correnti di maglia come in fig.3, solo la corrente i_x risulta incognita e quindi basta scrivere una sola LKT per la maglia percorsa da tale corrente:

$$R_1(i_x + i_{AB}) + R_2(i_x - g_m v_{R3}) + R_3 i_x = R_1(i_x + i_{AB}) + R_2(i_x - g_m R_3 i_x) + R_3 i_x = 0 \quad (6)$$

Riordinando, si ha:

$$i_x = \frac{-R_1}{R_1 + R_2(1 - g_m R_3) + R_3} i_{AB} \quad (7)$$

ed essendo:

$$v_{AB} = R_1 \left(\frac{-R_1}{R_1 + R_2(1 - g_m R_3) + R_3} + 1 \right) i_{AB} = R_1 \left[\frac{R_2(1 - g_m R_3) + R_3}{R_1 + R_2(1 - g_m R_3) + R_3} \right] i_{AB} \quad (8)$$

si ha:

$$R_{No} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}} = R_1 \left[\frac{R_2(1 - g_m R_3) + R_3}{R_1 + R_2(1 - g_m R_3) + R_3} \right] \quad (9)$$

e quindi:

$$R_{No} = \frac{10}{3} \Omega \quad (10)$$

Calcoliamo adesso la corrente del generatore equivalente di Norton, I_{No} , risolvendo il circuito di fig.4, in cui l'induttore è sostituito da un corto circuito e la resistenza R_1 eliminata perché in parallelo a un corto circuito:

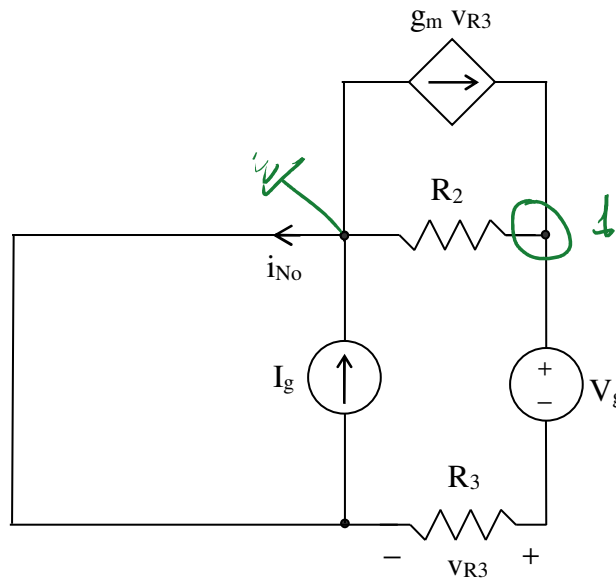


Fig. 4

Il circuito presenta un solo nodo, per cui può essere risolto scrivendo l'equazione al nodo 1 che risulterà identica alla (1).

Per cui, essendo:

$$i_{No} = \frac{e_1}{R_2} + I_g - g_m v_{R3} = \frac{e_1}{R_2} + I_g - g_m (e_1 - V_g) \quad (11)$$

riordinando si ha:

$$i_{No} = I_g + \left(\left(\frac{1}{R_2} - g_m \right) \frac{\left(\frac{1}{R_3} - g_m \right)}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - g_m \right)} + g_m \right) V_g \quad (12)$$

e quindi:

$$i_{No} = \frac{3}{2} A \quad (13)$$

Infine possiamo scrivere l'espressione della $i_L(t)$:

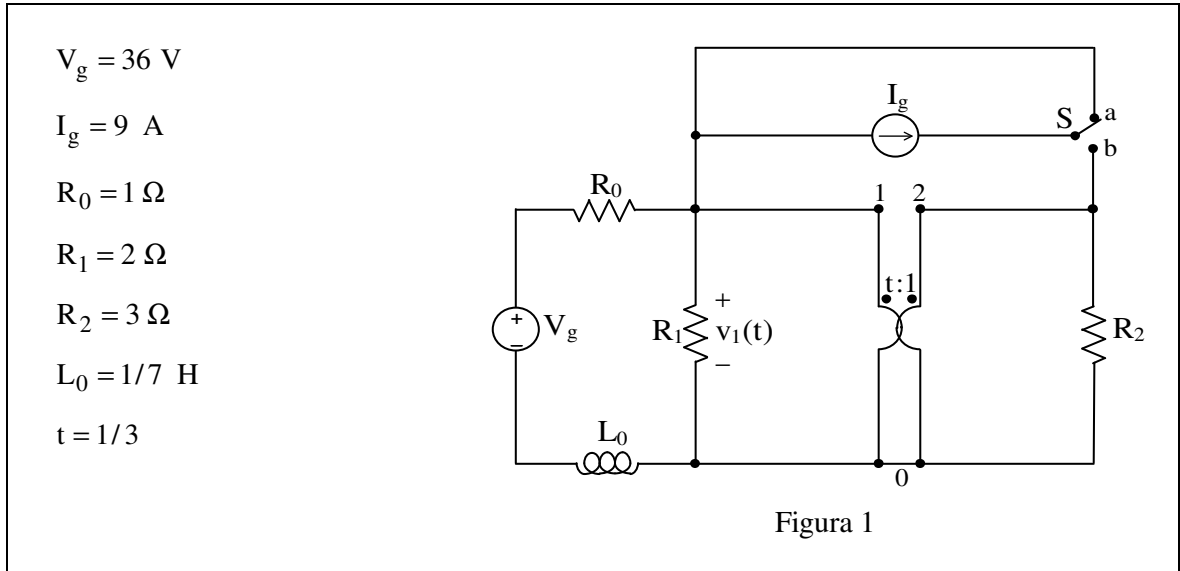
$$i_L(t) = [i_L(0^-) - i_{No}] e^{-\frac{R_{No}}{L} t} + i_{No} \quad (14)$$

e sostituendo i valori trovati:

$$i_L(t) = \frac{2}{5} e^{-\frac{10}{3} t} + \frac{3}{2} A \quad (15)$$

Esercizio 1.10

Supponendo che il circuito di fig. 1 sia in regime costante al tempo $t=0$ in cui il commutatore S passa dalla posizione a alla b, calcolare la tensione $v_1(t)$ ai capi del resistore di resistenza R_1 .



Preliminarmente occorre calcolare la condizione iniziale relativa alla corrente nell'induttore, che in condizioni di regime costante si comporta come un corto circuito. Riportando al primario la resistenza R_2 , la resistenza equivalente del bipolo resistivo visto dal generatore di tensione è:

$$R_{eq} = R_0 + \frac{R_1 \cdot t^2 R_2}{R_1 + t^2 R_2} = \frac{9}{7} = 1,286 \Omega \quad (1)$$

La corrente nell'induttore prima della commutazione di S vale allora:

$$i_L(0^-) = \frac{V_g}{R_{eq}} = 28 \text{ A} \quad (2)$$

Trattandosi di una rete con un solo elemento reattivo e con generatori costanti, la corrente $i_L(t)$ è esprimibile nella forma:

$$i_L(t) = [i_L(0^+) - I_{No}] e^{-tR_{No}/L_0} + I_{No} \quad (3)$$

dove la R_{No} è la resistenza vista dall'induttore e coincide con quella calcolata con la (1) e la costante di tempo vale:

$$\tau = \frac{L_0}{R_{eq}} = \frac{1}{9} = 111,1 \text{ ms} \quad (4)$$

Per il calcolo della I_{No} si può sostituire l'induttore con un corto circuito per calcolare la corrente che lo attraversa.

Utilizzando il metodo dei potenziali di nodo, mettendo a massa il nodo 0 ed indicando con v_1 e v_2 i potenziali dei due nodi 1 e 2 (si noti che v_1 e v_2 coincidono con le tensioni al primario ed al secondario del trasformatore ideale), si ha:

$$\begin{cases} \frac{v_1 - V_g}{R_0} + \frac{v_1}{R_1} + i_1 = -I_g \\ \frac{v_2}{R_2} + i_2 = I_g \end{cases} \quad (5)$$

dove i_1 ed i_2 sono le correnti nel primario e nel secondario del trasformatore ideale. Tenuto conto che:

$$v_1(t) = t v_2(t) \quad i_1(t) = -\frac{1}{t} i_2(t) \quad (6)$$

dalle (5) si ha:

$$v_1 = 12 \text{ V} \quad e \quad i_1 = 9 \text{ A} \quad (7)$$

e la corrente I_{No} è data da:

$$I_{No} = \frac{v_1}{R_1} + i_1 + I_g = 24 \text{ A} \quad (8)$$

per cui la corrente i_L è:

$$i_L(t) = 4 e^{-9t} + 24 \text{ A} \quad (9)$$

Sostituendo l'induttore con un generatore di corrente $i_L(t)$ e riutilizzando il metodo dei potenziali di nodo, mettendo a massa il nodo 0 si ha:

$$\begin{cases} -i_L + \frac{v_1}{R_1} + i_1 = -I_g \\ \frac{v_2}{R_2} + i_2 = I_g \end{cases} \quad (10)$$

e, considerando le (6), si ottiene:

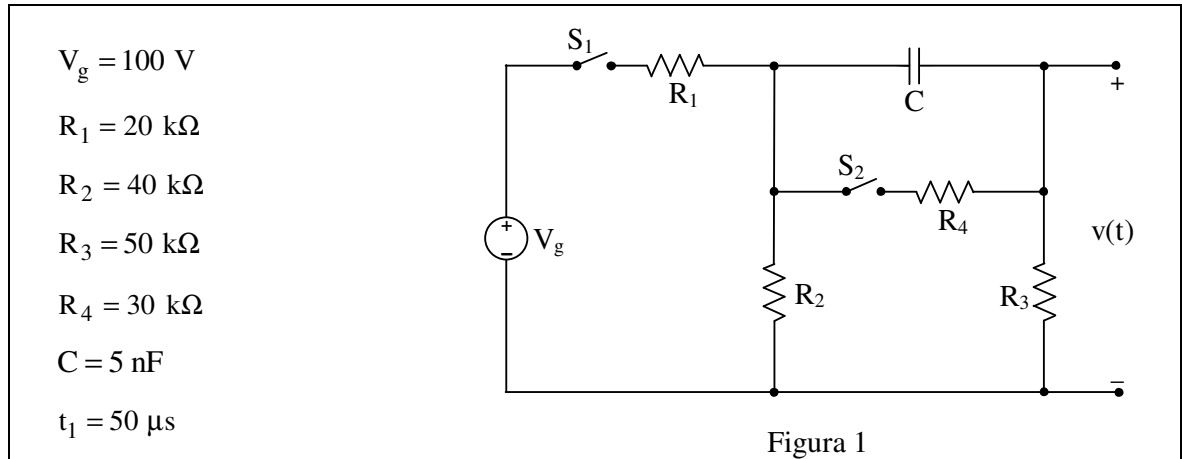
$$v_1 = \frac{\left(\frac{1}{t} - 1\right) I_g + i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{t^2 R_2}} \quad (11)$$

In definitiva:

$$v_1(t) = \frac{8}{7} e^{-9t} + 12 = 1,143 e^{-9t} + 12 \text{ V} \quad (12)$$

Esercizio 1.3

Il circuito in fig. 1 è in regime costante per $t = 0$, istante in cui l'interruttore S_1 chiude. Per $t = t_1$ chiude anche l'interruttore S_2 . Determinare la tensione $v(t)$ per $t > 0$.



Preliminarmente si osserva che è nulla la condizione iniziale relativa alla tensione ai capi del condensatore: $v_C(0^-) = 0 \text{ V}$.

Lo studio del transitorio va diviso in relazione ai due intervalli di tempo $0 < t < t_1$ e $t > t_1$.

a) Studio per $0 < t < t_1$

Trattandosi di una rete con un solo elemento a memoria e con generatori costanti, una generica variabile di rete $y(t)$ è esprimibile nella forma:

$$y(t) = [y(0+) - y(+\infty)] e^{-t/\tau} + y(+\infty) \quad (1)$$

All'inizio del transitorio la tensione ai capi del condensatore rimane immutata al valore del regime precedente, e cioè zero. Pertanto la formula del partitore di corrente dà:

$$v(0+) = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} V_g = \frac{1000}{19} = 52,63 \text{ V} \quad (2)$$

Dato che il generatore eroga una tensione continua, al termine del transitorio il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto:

$$v_C(+\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_g = \frac{200}{3} = 66,67 \text{ V} \quad v(+\infty) = 0 \text{ V} \quad (3)$$

La costante di tempo vale:

$$\tau = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) C = 316,7 \text{ }\mu\text{s} \quad (5)$$

Si ha allora:

$$v_C(t) = 66,67 \left(1 - e^{-3158t} \right) \text{ V} \quad (6)$$

$$v(t) = 52,63 e^{-3158t} \text{ V} \quad (7)$$

Tali relazioni rimarrebbero valide per ogni istante $t > 0$, se non intervenisse la chiusura del secondo interruttore. In vista di tale ulteriore transitorio, occorre calcolare la tensione ai capi del condensatore per $t=t_1$:

$$v_C(t_1) = 66,67(1 - e^{-3158t_1}) = 9,737 \text{ V} \quad (8)$$

b) Studio per $t > t_1$

Posto $t' = t - t_1$, anche in tale intervallo di tempo vale una formula del tipo della (1).

Per $t' = 0+$, per il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$[v(t')]_{t'=0+} = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} V_g - \frac{R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} v_C(t_1) = 44,94 \text{ V} \quad (9)$$

Per $t' \rightarrow \infty$ il condensatore si comporta come un circuito aperto; si ha:

$$[v(t')]_{t' \rightarrow \infty} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} V_g = 35,71 \text{ V} \quad (10)$$

La costante di tempo vale:

$$\tau' = \frac{R_4 \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}{R_4 + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} C = 101,8 \mu\text{s} \quad (11)$$

Quindi:

$$v(t') = 9,230 e^{-9825t'} + 35,71 \text{ V} \quad (12)$$

Il grafico della tensione $v(t)$ è riportato in fig. 2.