

Esercizio: 116.

Calcolare l'impedenza della serie di un resistore di resistenza uguale a $10\ \Omega$ e di un induttore di induttanza uguale a $20\ \text{mH}$ (alla frequenza industriale: $f = 50\ \text{Hz}$).

Sarà $\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L$, ove

$$\bar{Z}_R = R = 10\ \Omega$$

e

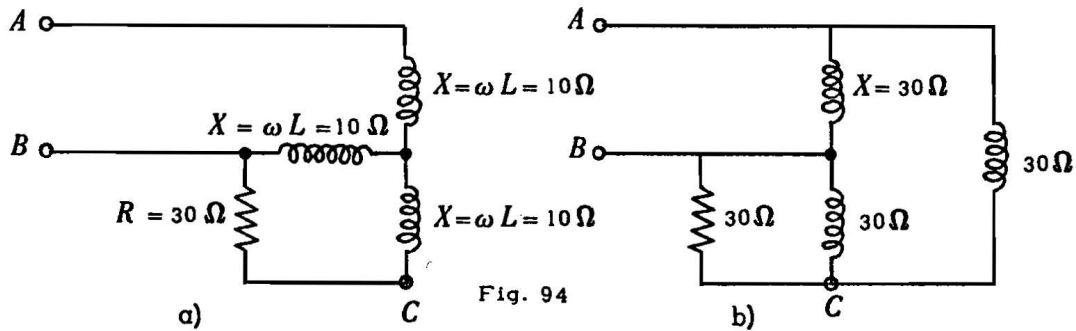
$$\bar{Z}_L = j\omega L = j2\pi fL = j314 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = j6,28$$

Quindi

$$\bar{Z} = 10 + j6,28.$$

Esercizio: 117.

Calcolare l'impedenza \bar{Z}_{AB} del bipolo rappresentato in Fig. 94



Si trasformi la stella ABC delle tre induttanze nel triangolo di induttanze rappresentato in fig. 100 b.

Il calcolo delle induttanze del triangolo può essere eseguito applicando le formule valide per la trasformazione delle stelle di resistori, nelle quali si sostituisca ad ogni resistenza l'impedenza del lato corrispondente. Si ottiene così:

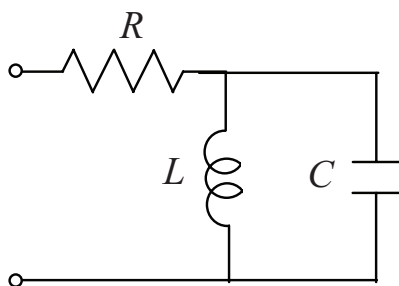
$$\bar{Z}_{\Delta AB} = \bar{Z}_{\Delta BC} = \bar{Z}_{\Delta CA} = j30\ \Omega.$$

L'impedenza \bar{Z}_{AB} può essere ora calcolata applicando le regole dei collegamenti serie-parallelo.

$$\bar{Z}_{BC} = \frac{30 \cdot j30}{30 + j30} = 15(1 + j)$$

$$\bar{Z}_{MN} = \frac{30}{13} + j \frac{240}{13}.$$

ES. 1.4 - Si consideri il circuito in figura, determinando L tale che la parte immaginaria dell'impedenza vista ai capi dei morsetti risulti $\text{Im}\{\dot{Z}\} = 100 \Omega$.



$$C = 10 \mu F$$

$$f = 1 \text{ kHz}$$

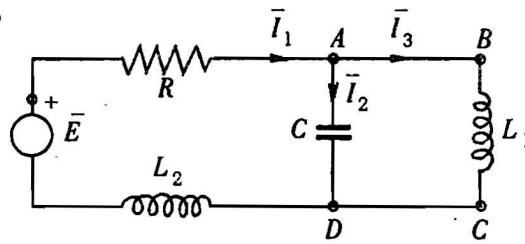
L'impedenza totale vista ai capi dei morsetti è

$$\dot{Z} = R + \frac{(j\omega L)/(j\omega C)}{j(\omega L - 1/\omega C)} = R + j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC},$$

quindi basta imporre

$$\text{Im}\{\dot{Z}\} = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = 100 \Rightarrow L = 2.19 \text{ mH} .$$

Esercizio: 128.



Determinare le correnti \bar{I}_1 , \bar{I}_2 e \bar{I}_3

\downarrow

$$\bar{E} = 500 \text{ V} \quad R = 100 \Omega$$

$$C = 2 \mu\text{F} \quad L_1 = 0,5 \text{ H}$$

$$L_2 = 0,1 \text{ H} \quad f = 100 \text{ Hz}$$

Il circuito in esame è formato dalla serie di una resistenza R e di una induttanza L_2 e dal parallelo di una capacità C e di una induttanza L_1 . L'impedenza equivalente è quindi data da:

$$Z_{\text{eq}} = R + jX_{L_2} - \frac{j \cdot j \cdot X_{L_1} X_C}{jX_{L_1} - jX_C} = R + j \left(X_{L_1} + \frac{X_{L_1} X_C}{X_C - X_{L_1}} \right)$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 628 \cdot 0,1 = 62,8 \Omega$$

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 628 \cdot 0,5 = 314 \Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{628 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = -\frac{10^6}{1256} = -797 \Omega$$

$$\bar{Z}_{\text{eq}} = 100 + j \left(62,8 - \frac{797 \cdot 314}{797 + 314} \right) = 100 + j \left(62,8 - \frac{250.000}{1111} \right) = 100 - j225$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{500}{100 - j225} = \frac{50.000 + j112.500}{10.000 + 50.700} = 0,82 + j1,85$$

Ricaviamo ora i valori di I_2 ed I_3 scrivendo le equazioni di Kirchhoff alla maglia ABCD ed al nodo A

$$\begin{cases} \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_1 & \bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 \\ j \cdot 314 \cdot \bar{I}_3 + j797 \cdot \bar{I}_2 = 0 & j \cdot 314 \cdot \bar{I}_3 = j797 \bar{I}_3 - j797 \bar{I}_1 \end{cases}$$

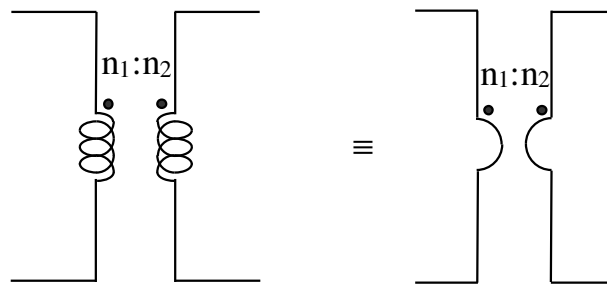
da cui, sostituendo il valore di \bar{I}_1 sopra determinato, si ricava:

$$j\bar{I}_3 \cdot 483 = j\bar{I}_1 797 = j \cdot 625 - 1470 \quad \bar{I}_3 = 1,35 + j \cdot 3,05$$

Si sostituisce ancora nell'equazione del nodo A e si ottiene il valore di \bar{I}_2 .

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = (0,82 - 1,35) + j(1,85 - 3,05) = -0,53 - j1,20$$

SIMBOLI EQUIVALENTI



$n_1:n_2 \equiv n:1 \equiv n \equiv t \equiv a \equiv k$

Esercizio 8.6

Dato il circuito di Fig. 8.6, calcolare il valore di i_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $C = 50\ \mu F$, $L = 10\ mH$ e $j = 10 \sin(1000t)\ A$.

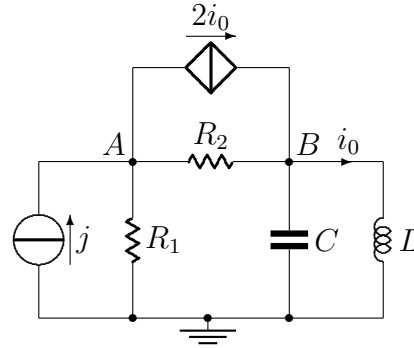
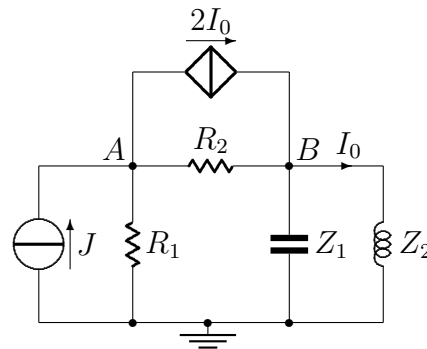


Figura 8.6: Circuito dell'esercizio 10.7

Soluzione

Passiamo ai fasori:



dove

$$\omega = 1000\ rad/s$$

$$J = -j10\ A$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = -j20\ \Omega$$

$$Z_2 = j\omega L = j10\ \Omega$$

inoltre

$$I_0 = \frac{V_B}{Z_2}$$

Il nodo di riferimento è il nodo di massa. Scriviamo le equazioni delle tensioni ai nodi A e B :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 2 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{10\Omega} & -\frac{1}{10\Omega} & 2 \\ -\frac{1}{10\Omega} & \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{-j20\Omega} + \frac{1}{j10\Omega} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{j10\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-160 + j280) V$$

$$V_B = (80 + j160) V$$

$$I_0 = (16 - j8) A$$

e quindi

$$i_0 = 17.89 \cos(1000t - 26.56^\circ) A$$

Esercizio 8.9

Dato il circuito di Fig. 8.9, calcolare la potenza media assorbita dalla resistenza R_2 . Siano dati $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $Z_1 = j2\ \Omega$, $Z_2 = -j\ \Omega$ e $J = 8\angle 60^\circ\ \text{A}$.

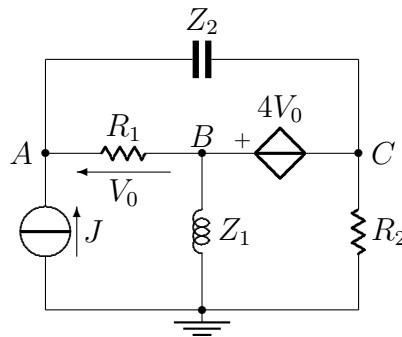


Figura 8.9: Circuito dell'esercizio 11.5

Soluzione

Per risolvere il problema conviene applicare il metodo dei nodi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{Z_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{-j\Omega} & -\frac{1}{2\Omega} & -\frac{1}{-j\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{2\Omega} - \frac{1}{-j\Omega} & \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{j2\Omega} & \frac{1}{-j\Omega} + \frac{1}{4\Omega} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\angle 60^\circ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-4.22 + j13.08) V$$

$$V_B = (-5.68 + j13.74) V$$

$$V_C = (-11.48 + j16.36) V$$

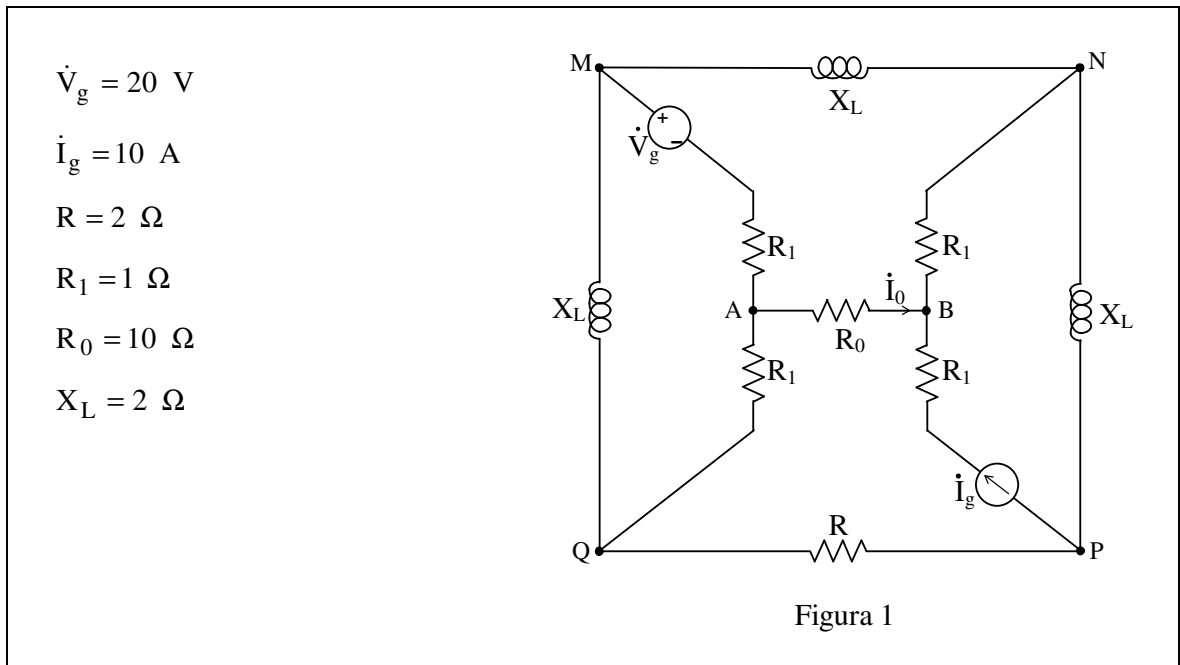
$$V_0 = (1.45 - j0.65) V$$

A questo punto la potenza media assorbita da R_2 è data da:

$$P = \frac{|V_C|^2}{2R_2} = \frac{(20 V)^2}{2 \cdot 4 \Omega} = 2.5 W$$

Esercizio 3.4

Nel circuito in fig. 1, determinare il fasore della corrente \dot{I}_0 .



Utilizzando il metodo delle correnti di maglia, essendo presente nel lato BP un generatore di corrente, sono tre le maglie da considerare.

Dette \dot{J}_1 , \dot{J}_2 e \dot{J}_3 le correnti cicliche (antiorarie) nelle maglie MQPN, MABN ed MQA, la corrente incognita \dot{I}_0 si identifica con la corrente di maglia \dot{J}_2 . Assegnando, inoltre, alla corrente impressa \dot{I}_g il percorso BNP, si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} R \dot{J}_1 + jX_L (\dot{J}_1 - \dot{I}_g) + jX_L (\dot{J}_1 + \dot{J}_2) + jX_L (\dot{J}_1 + \dot{J}_3) = 0 \\ R_0 \dot{J}_2 + R_1 (\dot{J}_2 + \dot{I}_g) + jX_L (\dot{J}_2 + \dot{J}_1) + R_1 (\dot{J}_2 - \dot{J}_3) = -\dot{V}_g \\ R_1 \dot{J}_3 + R_1 (\dot{J}_3 - \dot{J}_2) + jX_L (\dot{J}_3 + \dot{J}_1) = \dot{V}_g \end{cases} \quad (1)$$

che, posto in forma matriciale, diviene:

$$\begin{bmatrix} R + 3jX_L & jX_L & jX_L \\ jX_L & R_0 + 2R_1 + jX_L & -R_1 \\ jX_L & -R_1 & 2R_1 + jX_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jX_L \dot{I}_g \\ -\dot{V}_g - R_1 \dot{I}_g \\ \dot{V}_g \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo si ha:

$$\dot{I}_0 = \dot{J}_2 = 1,743 \angle -164^\circ \text{ A} \quad (4)$$

Esercizio 20 ter

Data la rete a regime sinusoidale in figura, calcolare la potenza erogata dal generatore I_0 .

$$\langle \dot{A} = 90 + j20 \text{ VA} \rangle$$

$$R_1 = 0,5 \, \Omega, \quad R_2 = 1 \, \Omega, \quad X_C = -1 \, \Omega, \quad X_L = 0,5 \, \Omega, \quad n = 0,5, \quad \dot{I}_{g0} = 5 - j5 \text{ A}, \quad \dot{V}_{g1} = 5 \text{ V}, \quad \dot{I}_{g2} = j10 \text{ A}$$

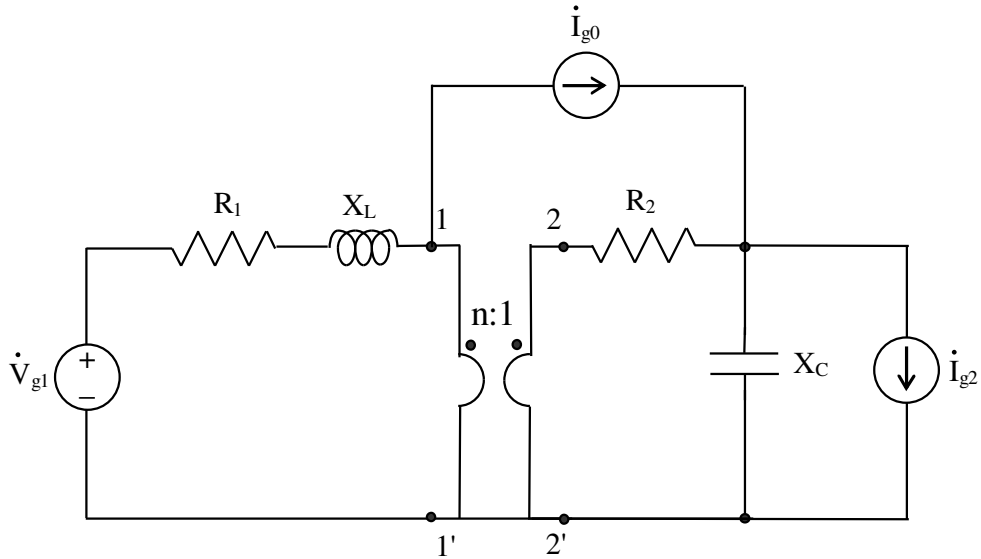


Fig. 1

Soluzione 1 (anelli)

Risolviamo il circuito con il metodo degli anelli. Prima però, poiché il trasformatore ideale è un elemento che non può essere controllato solo in corrente (o solo in tensione), bisogna utilizzare il metodo degli anelli “modificato”. A tal fine è necessario applicare il teorema di sostituzione, sostituendo i due lati del trasformatore ideale con due generatori di tensione le cui tensioni sono uguali alle tensioni V_{t1} della porta 1-1' e V_{t2} della porta 2-2' del trasformatore. Inoltre è opportuno effettuare la trasformazione del lato alla Norton nell'equivalente lato alla Thevenin. In tal modo si ottiene il circuito di fig. 2, in cui sono evidenziate anche le correnti di anello scelte: si fa osservare che la corrente dell'anello 3 coincide con la corrente I_{g0} del generatore.

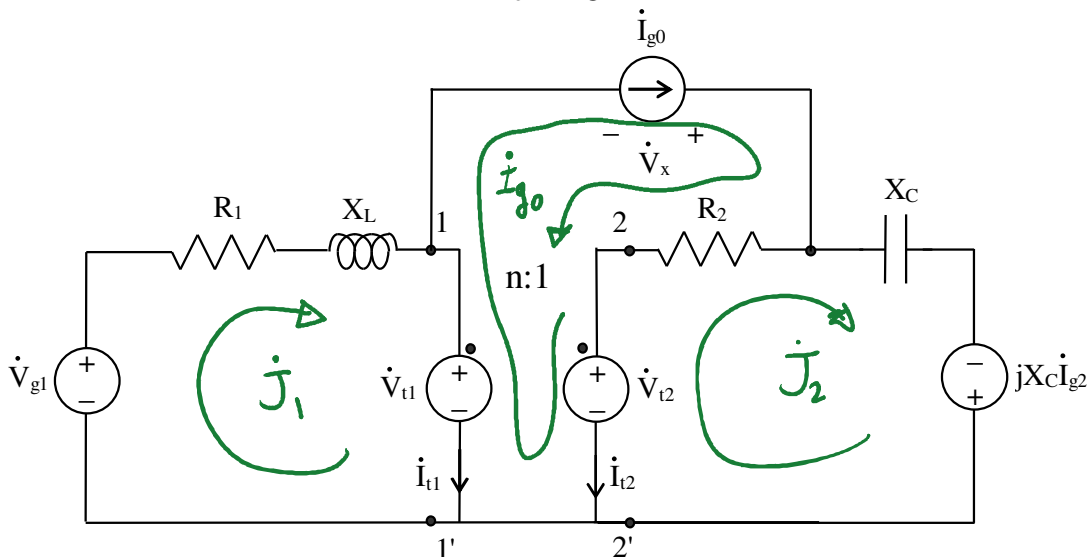


Fig. 2

Scelte le correnti di anello come in fig.2 si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} R_1 + jX_L & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + jX_C & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{I}_{g0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{g1} - \dot{V}_{t1} \\ \dot{V}_{t2} + jX_C \dot{I}_{g2} \\ \dot{V}_{t1} + \dot{V}_x - \dot{V}_{t2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il sistema (1) è un sistema di 3 equazioni in 5 incognite: $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \dot{V}_{t1}, \dot{V}_{t2}, \dot{V}_x$. Pertanto, per risolverlo, bisogna aggiungere altre 2 equazioni. Le equazioni da aggiungere sono le equazioni dei lati che sono stati sostituiti, cioè le equazioni di lato del trasformatore ideale:

$$\frac{\dot{V}_{t1}}{\dot{V}_{t2}} = n \Rightarrow \dot{V}_{t1} = n\dot{V}_{t2} \quad (2)$$

$$\frac{\dot{I}_{t1}}{\dot{I}_{t2}} = \frac{\dot{J}_1 - \dot{I}_{g0}}{\dot{I}_{g0} - \dot{J}_2} = -\frac{1}{n} \Rightarrow \dot{J}_1 = \frac{1}{n}\dot{J}_2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\dot{I}_{g0} \quad (3)$$

e sostituendo nel sistema (1) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} R_1 + jX_L & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + jX_C & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\dot{J}_2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\dot{I}_{g0} \\ \dot{J}_2 \\ \dot{I}_{g0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{g1} - n\dot{V}_{t2} \\ \dot{V}_{t2} + jX_C \dot{I}_{g2} \\ n\dot{V}_{t2} + \dot{V}_x - \dot{V}_{t2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (R_1 + jX_L)\dot{J}_2 + n^2\dot{V}_{t2} &= n\dot{V}_{g1} - (R_1 + jX_L)(n-1)\dot{I}_{g0} \\ (R_2 + jX_C)\dot{J}_2 - \dot{V}_{t2} &= R_2\dot{I}_{g0} + jX_C\dot{I}_{g2} \end{aligned} \quad (5)$$

e il sistema (4) può essere ridotto alle seguenti due equazioni:

$$\begin{aligned} (R_1 + jX_L)\dot{J}_2 + n^2\dot{V}_{t2} &= n\dot{V}_{g1} - (n-1)(R_1 + jX_L)\dot{I}_{g0} \\ (R_2 + jX_C)\dot{J}_2 - \dot{V}_{t2} &= R_2\dot{I}_{g0} + jX_C\dot{I}_{g2} \end{aligned} \quad (6)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{J}_2 &= \frac{n}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{V}_{g1} - \frac{(n-1)(R_1 + jX_L) + n^2R_2}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{I}_{g0} + \frac{jn^2X_C}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{I}_{g2} \\ \dot{V}_{t2} &= \frac{n(R_2 + jX_C)}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{V}_{g1} - \frac{(R_1 + jX_L)[nR_2 + j(n-1)X_C]}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{I}_{g0} + \\ &\quad - \frac{jX_C(R_1 + jX_L)}{R_1 + jX_L + n^2(R_2 + jX_C)} \dot{I}_{g2} \end{aligned} \quad (7)$$

sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{aligned} \dot{J}_2 &= 10 - j5 \text{ A} \\ \dot{V}_{t2} &= -10 - j10 \text{ V} \end{aligned} \quad (8)$$

dall'ultima equazione del sistema (4) si ricava, in maniera diretta, il valore della tensione ai capi del generatore di corrente \dot{I}_{g0} :

$$\dot{V}_x = R_2 \dot{I}_{g0} + (1 - n) \dot{V}_{t2} + R_2 j_2 = -10 - j5 \text{ V} \quad (9)$$

Pertanto la potenza complessa erogata dal generatore di corrente I_{g0} è data da:

$$\mathbf{A} = \dot{V}_x \dot{I}_{g0}^* = -25 - j75 \text{ VA} \quad (10)$$

Soluzione 2 (nodi)

Risolviamo il circuito con il metodo degli nodi. Prima però – come detto nel corso della “soluzione 1” – poiché il trasformatore ideale è un elemento che non può essere controllato solo in tensione, bisogna utilizzare il metodo dei nodi “modificato”. A tal fine è necessario applicare il teorema di sostituzione, sostituendo i due lati del trasformatore ideale con due generatori di corrente le cui correnti sono uguali alle correnti I_{t1} della porta 1-1' e I_{t2} della porta 2-2' del trasformatore. Inoltre è opportuno effettuare la trasformazione del lato alla Thevenin nell'equivalente lato alla Norton. In tal modo si ottiene il circuito di fig. 3, in cui sono evidenziati il nodo di riferimento e i potenziali nodali.

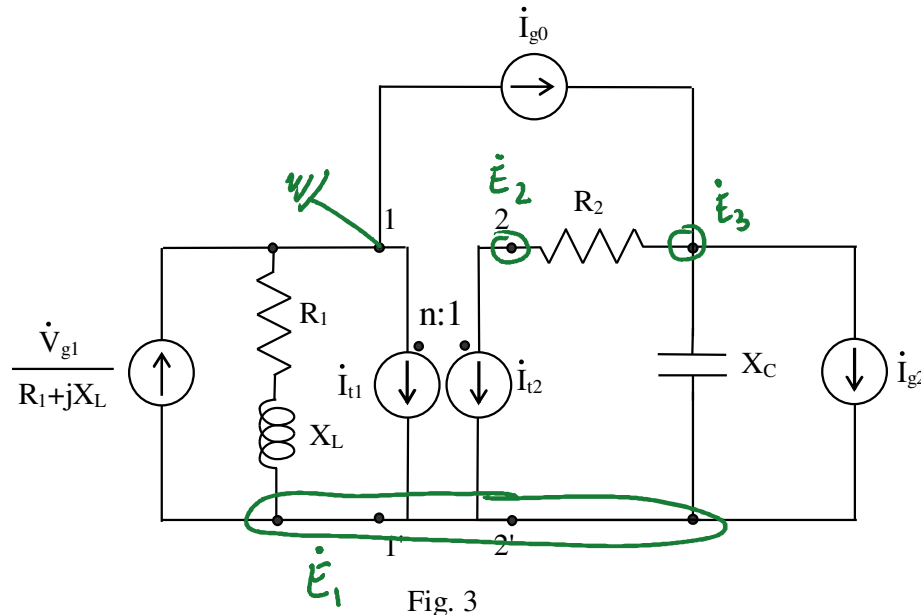


Fig. 3

Scelte i potenziali nodali come in fig.3 si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{jX_C} & 0 & -\frac{1}{jX_C} \\ 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{jX_C} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{V}_{g1}}{R_1 + jX_L} + \dot{I}_{t1} + \dot{I}_{t2} + \dot{I}_{g2} \\ -\dot{I}_{t2} \\ \dot{I}_{g0} - \dot{I}_{g2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

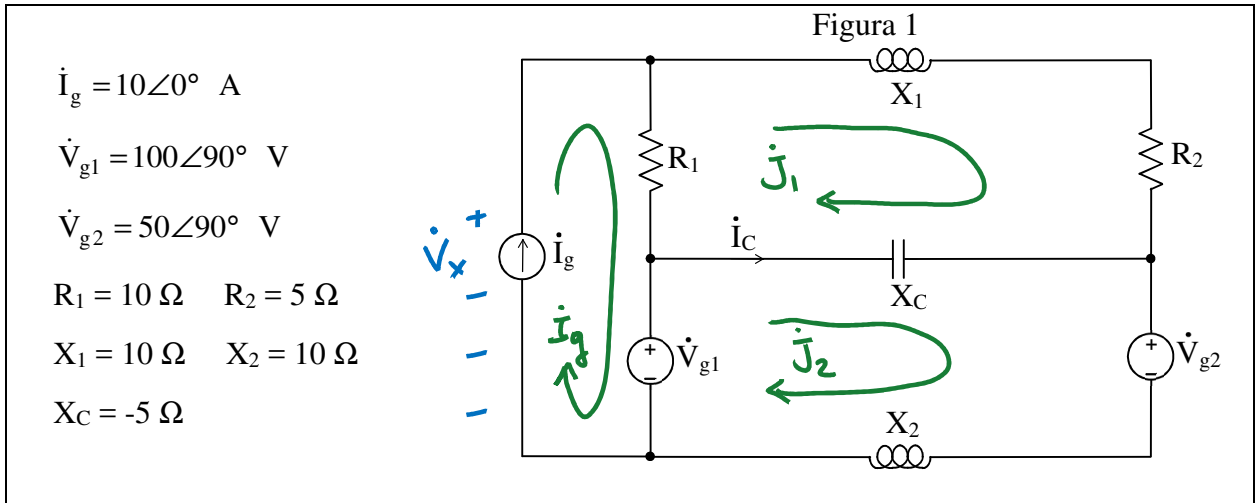
Il sistema (11) è un sistema di 3 equazioni in 5 incognite: $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3, \dot{I}_{t1}, \dot{I}_{t2}$. Pertanto, per risolverlo, bisogna aggiungere altre 2 equazioni. Le equazioni da aggiungere sono le equazioni dei lati che sono stati sostituiti, cioè le equazioni di lato del trasformatore ideale:

$$\frac{\dot{V}_{t1}}{\dot{V}_{t2}} = \frac{-\dot{E}_1}{\dot{E}_2 - \dot{E}_1} = n \Rightarrow \dot{E}_1 = \frac{n}{n-1} \dot{E}_2 \quad (12)$$

$$(13)$$

Esercizio 3.12

Nel circuito di fig. 1 calcolare il fasore della corrente attraverso il capacitore.



Utilizziamo il metodo degli anelli per risolvere il circuito, assegnando le correnti di anello come in figura. Dette J_1 e J_2 le correnti (orarie) di anello che circolano negli induttori e assegnato alla corrente del generatore di corrente il percorso del relativo anello, si ha il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j(X_1 + X_C) & -jX_C & -R_1 \\ -jX_C & j(X_2 + X_C) & 0 \\ -R_1 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{I}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V}_{g1} - \dot{V}_{g2} \\ \dot{V}_x - \dot{V}_{g1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

in cui V_x è la tensione ai capi del generatore di corrente I_g .

Il sistema (1) può essere immediatamente ridotto al seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$R_1(\dot{J}_1 - \dot{I}_g) + jX_1\dot{J}_1 + R_2\dot{J}_1 + jX_C(\dot{J}_1 - \dot{J}_2) = 0 \quad (2)$$

$$jX_2\dot{J}_2 + jX_C(\dot{J}_2 - \dot{J}_1) = \dot{V}_{g1} - \dot{V}_{g2} \quad (3)$$

che, posto nuovamente in forma matriciale, diviene:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j(X_1 + X_C) & -jX_C \\ -jX_C & j(X_2 + X_C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1\dot{I}_g \\ \dot{V}_{g1} - \dot{V}_{g2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sostituendo i valori numerici proposti e semplificando per i fattori 5 e $j5$ le due equazioni, si ha:

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & j1 \\ j1 & j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ j10 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Risolvendo con il metodo di Cramer si ha:

$$\dot{J}_1 = \frac{10}{3}(2 - j) \text{ A} \quad \dot{J}_2 = \frac{10}{3}(1 + j) \text{ A} \quad (6)$$

e quindi:

$$\dot{I}_C = \dot{J}_2 - \dot{J}_1 = \frac{10}{3}(-1 + j2) \text{ A} \quad (7)$$

Esame di ELETTROTECNICA del 10-7-2015
 C.d.L. Ingegneria Industriale, C.d.L. Ingegneria Informatica
 Esercizio n.2

Data la rete a regime sinusoidale, determinare l'impedenza Z affinché sia massima la potenza attiva ad essa fornita. Si calcoli, infine, tale potenza.

$$\left\langle Z = \frac{3}{4} + j\frac{1}{4} \Omega; \quad P_Z = \frac{125}{3} \text{ W} \quad [V_{Th} = 5 + j10 \text{ V}] \right\rangle$$

$$R_0 = 3\Omega, \quad R_1 = 1\Omega, \quad X_1 = 4\Omega, \quad X_2 = 1\Omega, \quad X_C = -1\Omega, \quad \dot{V}_{g0} = 5 - j5 \text{ V}, \quad \dot{I}_{g1} = j15 \text{ A}.$$

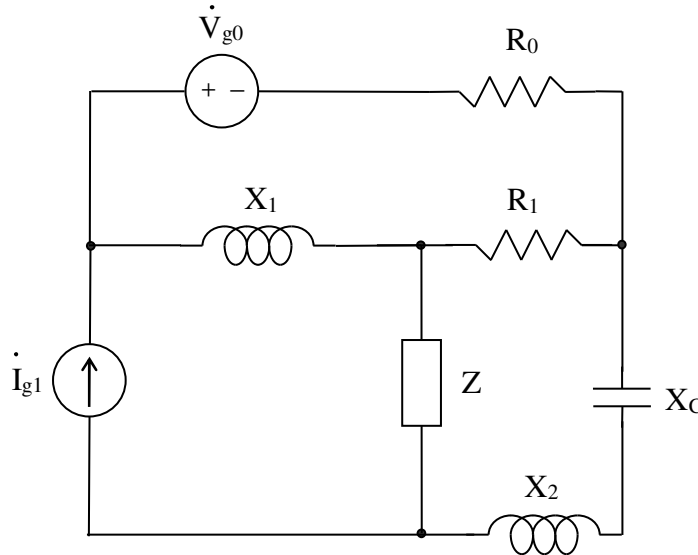


Fig. 1

Soluzione

Trasformiamo la rete nell'equivalente di Thevenin considerando l'impedenza Z come carico. Dapprima si calcoli l'impedenza di Thevenin Z_{Th} . Procederemo al calcolo di Z_{Th} mediante la definizione di impedenza a una porta: $Z=V/I$. Spegniamo i generatori indipendenti della rete e introduciamo un generatore di tensione V fittizio al posto della Z ottenendo il seguente circuito:

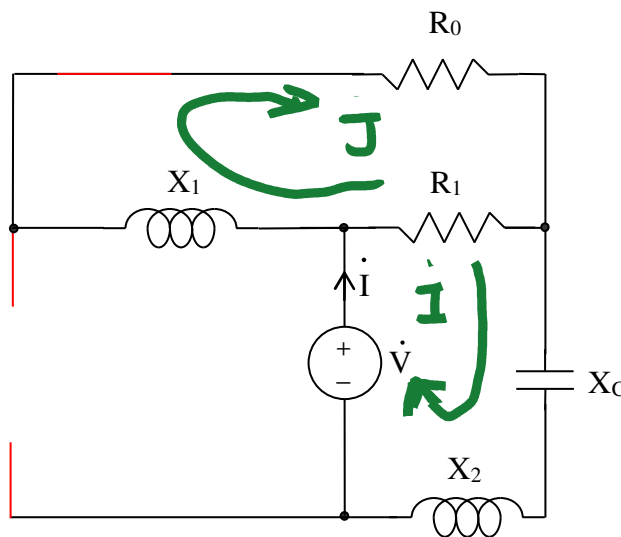


Fig. 2

Scelte le correnti di anello come in fig.2 e risolvendo con il metodo degli anelli si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + jX_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + jX_C + jX_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V} \end{bmatrix} \quad (1)$$

da cui si ricava:

$$i = \frac{\begin{vmatrix} R_0 + R_1 + jX_1 & 0 \\ -R_1 & \dot{V} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_0 + R_1 + jX_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + jX_C + jX_2 \end{vmatrix}} \quad (2)$$

e quindi:

$$Z_{Th} = \frac{\dot{V}}{i} = \frac{\begin{vmatrix} R_0 + R_1 + jX_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + jX_C + jX_2 \end{vmatrix}}{R_0 + R_1 + jX_1} \quad (3)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$Z_{Th} = \frac{4 + j4 - 1}{4 + j4} = \frac{3 + j4}{4 + j4} = \frac{1}{4} \frac{(3 + j4)(1 - j)}{2} = \frac{7 + j}{8} \Omega \quad (4)$$

Il calcolo dell'impedenza di Thevenin Z_{Th} poteva anche essere risolto mediante riduzioni serie e parallelo.

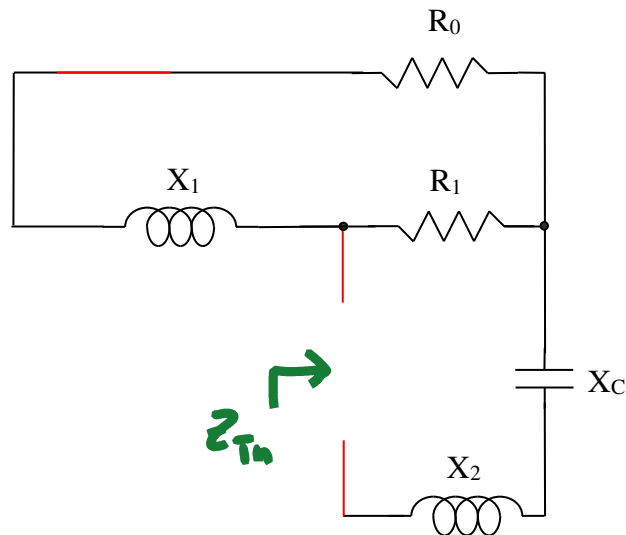


Fig. 3

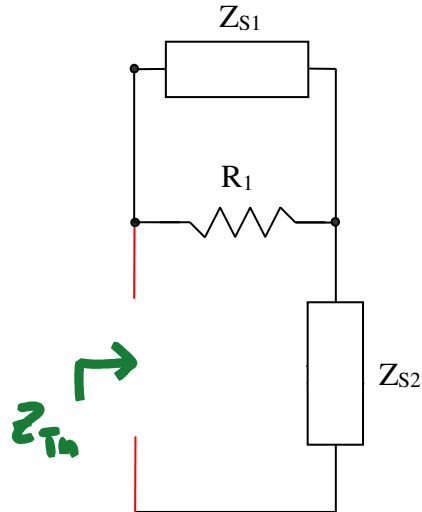


Fig. 4

in cui:

$$Z_{S1} = R_0 + jX_1 \quad \text{e} \quad Z_{S2} = j(X_2 + X_C) \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$Z_{Th} = Z_{S2} + \frac{R_1 Z_{S1}}{R_1 + Z_{S1}} \quad (6)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$Z_{Th} = 0 + \frac{3 + j4}{4 + j4} = \frac{7 + j}{8} \Omega \quad (7)$$

Per il teorema del massimo trasferimento di potenza bisogna porre:

$$Z = Z_{Th}^* = \frac{7}{8} - j\frac{1}{8} \Omega \quad (8)$$

Calcoliamo adesso la tensione V_{Th} . Il circuito da considerare è quello di fig.5, in cui sono evidenziate le correnti scelte per la soluzione con il metodo degli anelli.

(1)

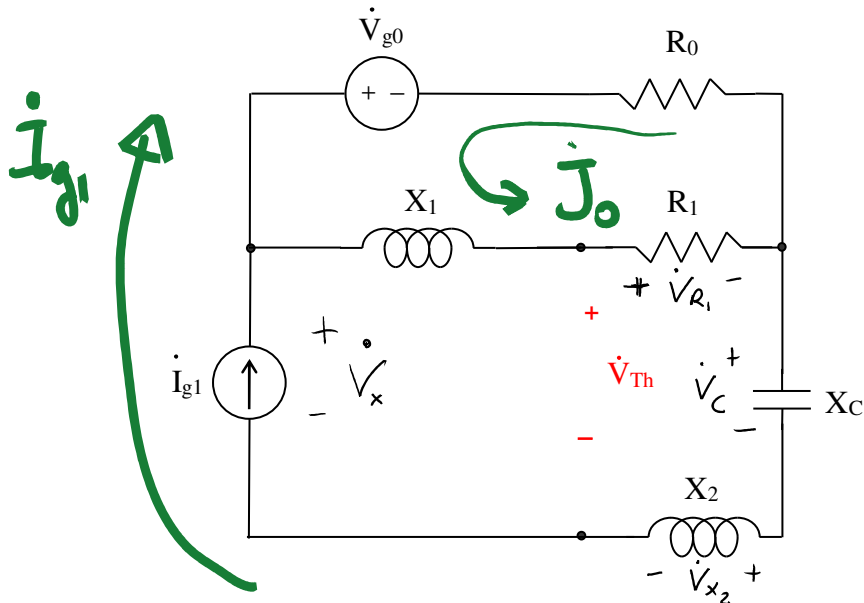


Fig. 5

Da cui si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + jX_1 & -R_0 \\ -R_0 & R_0 + jX_C + jX_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_0 \\ i_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{g0} \\ \dot{V}_x - \dot{V}_{g0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

e quindi:

$$j_0 = \frac{\dot{V}_{g0} + R_0 i_{g1}}{R_0 + R_1 + jX_1} \quad (10)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$j_0 = \frac{5 - j5 + j45}{4 + j4} = \frac{5 + j40}{4 + j4} = \frac{5(1 + j8)(1 - j)}{4(1 + j)(1 - j)} = \frac{45}{8} + j\frac{35}{8} \text{ A} \quad (11)$$

Il calcolo della tensione V_{Th} si può effettuare scrivendo una LKT:

$$\dot{V}_{Th} = \dot{V}_{R_1} + \dot{V}_C + \dot{V}_{X_2} = R_1 j_0 + jX_C i_{g1} + jX_2 i_{g1} \quad (12)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\dot{V}_{Th} = \frac{45}{8} + j\frac{35}{8} \text{ V} \quad (13)$$

E infine:

$$P_{max} = \frac{|\dot{V}_{Th}|^2}{4Re\{Z\}} \quad (14)$$

e cioè:

$$P_{max} = \frac{1625}{112} = 14.5 \text{ W} \quad (15)$$

Esercizio

Data la rete a regime sinusoidale, determinare l'impedenza Z affinché sia massima la potenza attiva ad essa fornita. Si calcoli, infine, tale potenza.

$$\left\langle Z = \frac{3}{197} \left(7 - j \frac{1}{2} \right) \Omega; \quad P_{MAX} = 1071 \text{ W}; \quad \left[\dot{V}_{Th} = -\frac{300}{197} (1 + j14) \text{ V} \right] \right\rangle$$

$$R_1 = 2 \Omega, \quad R_2 = 0.5 \Omega, \quad X_C = -1 \Omega, \quad X_L = 2 \Omega, \quad n=2, \quad \dot{I}_g = j200 \text{ A}.$$

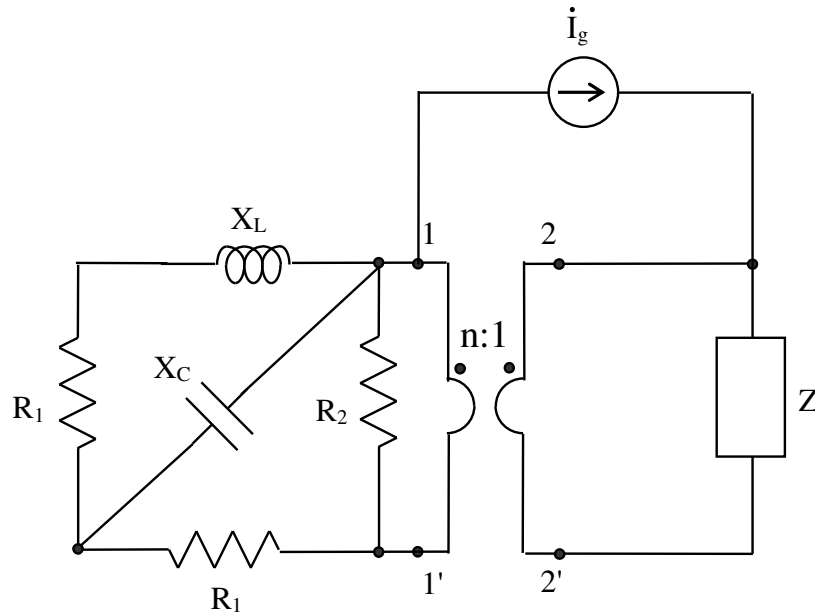


Fig. 1

Soluzione

Trasformiamo la rete nell'equivalente di Thevenin considerando l'impedenza Z come carico. Dapprima si calcoli l'impedenza di Thevenin Z_{Th} .

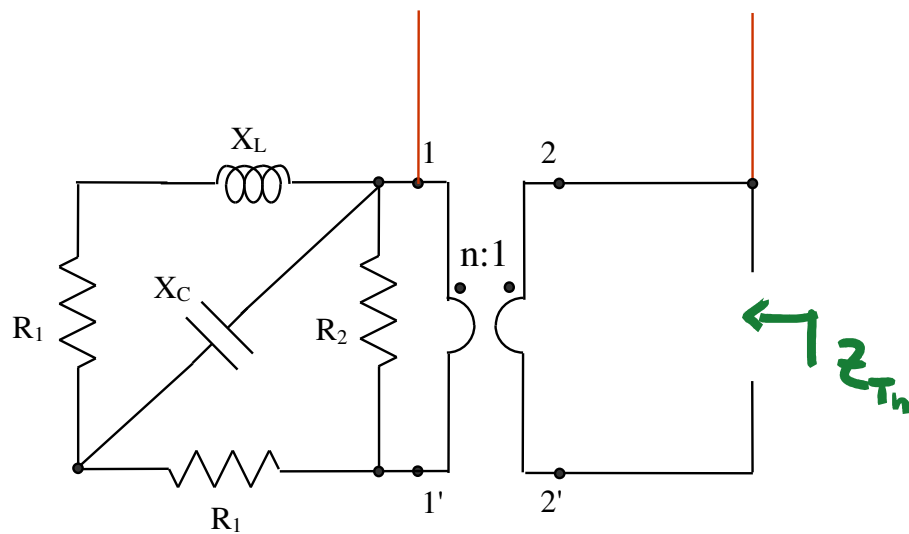


Fig. 2

Calcoliamo l'impedenza di Thevenin Z_{Th} mediante riduzioni serie e parallelo.

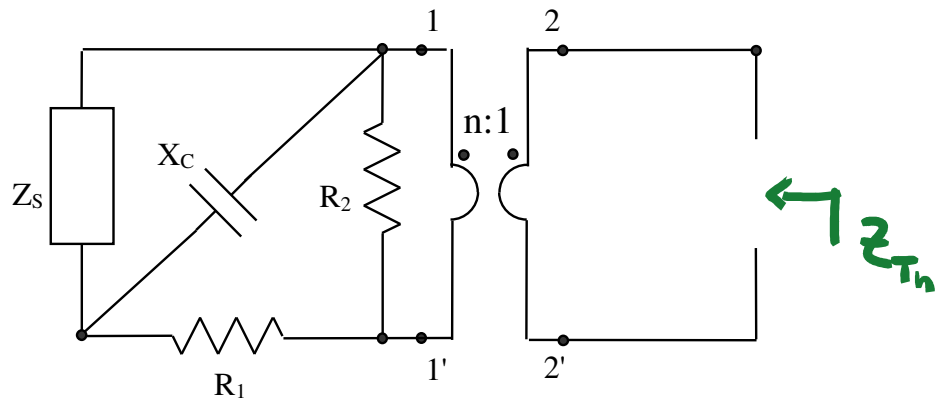


Fig. 3

in cui:

$$Z_S = R_1 + jX_L \quad (1)$$

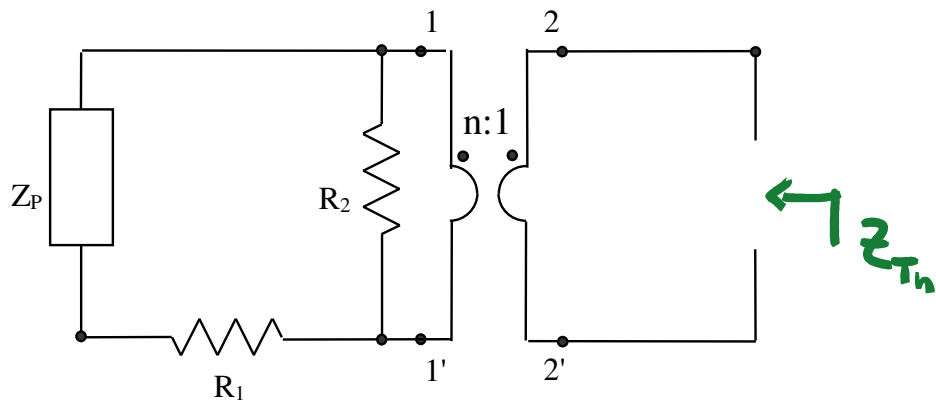


Fig. 4

in cui:

$$Z_P = \frac{Z_S jX_C}{Z_S + jX_C} \quad (2)$$

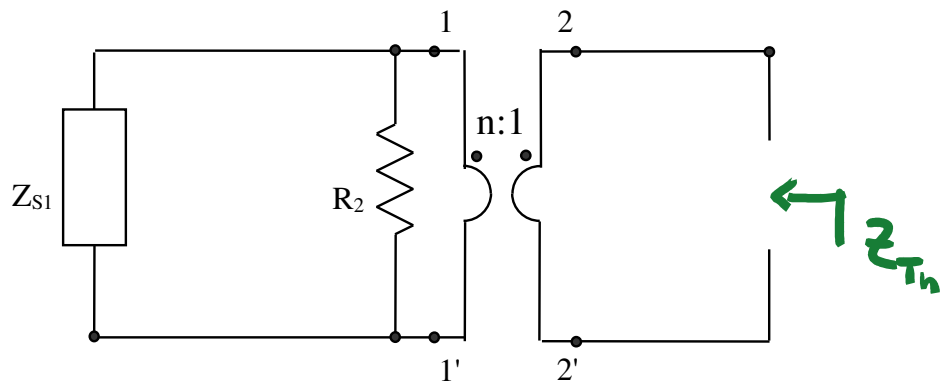


Fig. 5

in cui:

$$Z_{S1} = Z_P + R_1 \quad (3)$$

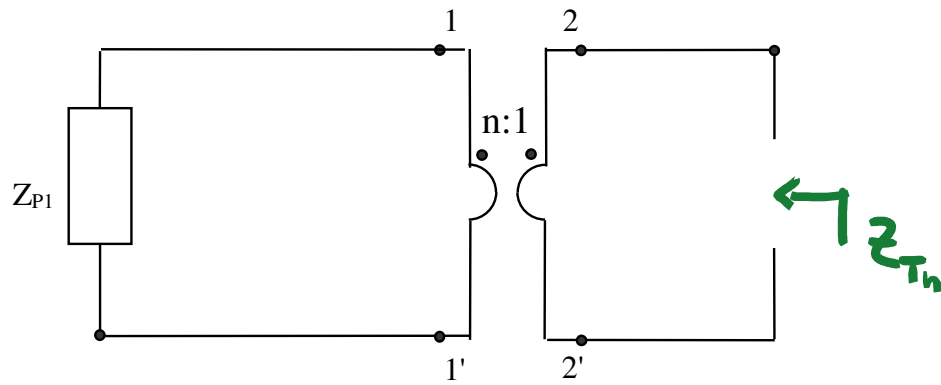


Fig. 6

in cui:

$$Z_{P1} = \frac{Z_{S1}R_2}{Z_{S1} + R_2} \quad (4)$$

A questo punto, si può riportare l'impedenza Z_{P1} dal primario al secondario del trasformatore:

$$Z_{Th} = \frac{1}{n^2} Z_{P1} \quad (5)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$Z_{Th} = \frac{3}{197} \left(7 + j\frac{1}{2} \right) \Omega \quad (6)$$

Per il teorema del massimo trasferimento di potenza bisogna porre:

$$Z = Z_{Th}^* = \frac{3}{197} \left(7 - j\frac{1}{2} \right) \Omega \quad (7)$$

Calcoliamo adesso la tensione V_{Th} . Il circuito da considerare è quello di fig.7.

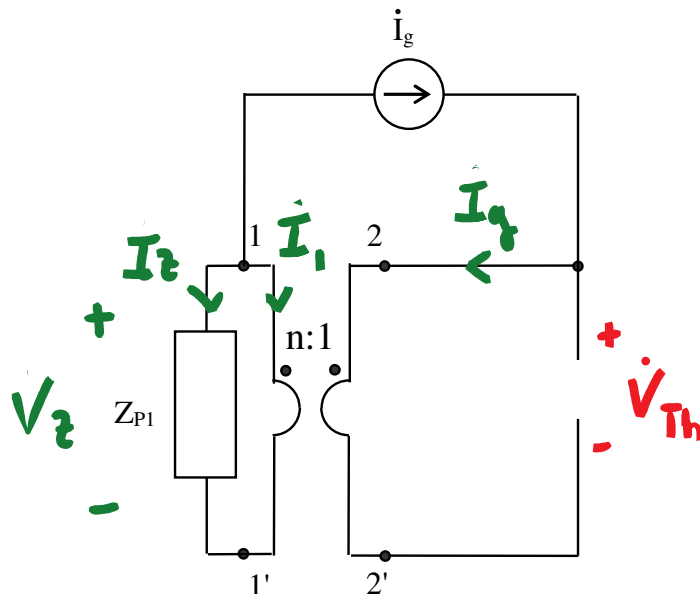


Fig. 7

Utilizzando le equazioni di lato del trasformatore ideale, si ha:

$$\frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_{Th}} = n \Rightarrow \dot{V}_{Th} = \frac{1}{n} \dot{V}_Z = \frac{1}{n} Z_{P1} \dot{I}_Z \quad (8)$$

e

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_g} = -\frac{1}{n} \Rightarrow \dot{I}_1 = -\frac{1}{n} \dot{I}_g \quad (9)$$

Scrivendo una LKC al nodo 1, si ha:

$$\dot{I}_Z = -(\dot{I}_1 + \dot{I}_g) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \dot{I}_g \quad (10)$$

e quindi:

$$\dot{V}_{Th} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) Z_{P1} \dot{I}_g \quad (11)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\dot{V}_{Th} = -\frac{300}{197} (1 + j14) \text{ V} \quad (12)$$

E infine:

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{Th}|^2}{4\text{Re}\{Z\}} \quad (13)$$

e cioè:

$$P_{\max} = 1071 \text{ W} \quad (14)$$