Esercizio 2.5

Nella rete di fig. 1, determinare i potenziali dei nodi M, N *e* P *rispetto al nodo* O.

$V_{g1} = 2\ \text{V}$

$V_{g5} = V_{g6} = 6\ \text{V}$

$I_{g1} = 3\ \text{A}$

$I_{g3} = 2\ \text{A}$

$I_{g4} = 0{,}5\ \text{A}$

$I_{g6} = 4\ \text{A}$

$R_1 = 3\ \Omega \qquad R_2 = 5\ \Omega$

$R_3 = 2\ \Omega \qquad R_4 = 4\ \Omega$

$R_5 = 6\ \Omega \qquad R_6 = 1\ \Omega$

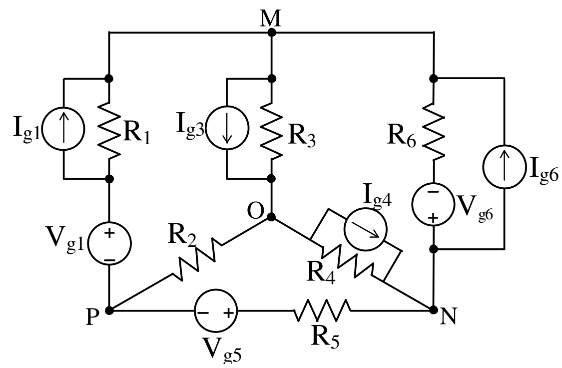


Figura 1

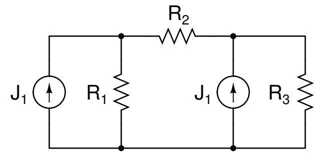
Si trasformino tutti i lati alla Thevenin nel loro equivalente alla Norton e pure il bipolo facente capo ai morsetti M e P nel suo equivalente di Norton (il cui generatore di corrente vale $I_{cc1}=(R_1 I_{g1} + V_{g1})/R_1=11/3$ A, con la freccia verso M). Quindi, applicando il metodo del potenziale ai nodi, con nodo di riferimento in O, si ha il sistema:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_6}\right)E_M - \dfrac{1}{R_6}E_N - \dfrac{1}{R_1}E_P = I_{cc1} - I_{g3} + I_{g6} - \dfrac{1}{R_6}V_{g6} \\ -\dfrac{1}{R_1}E_M + \left(\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{R_6}\right)E_N - \dfrac{1}{R_5}E_P = I_{g4} + \dfrac{1}{R_5}V_{g5} - I_{g6} + \dfrac{1}{R_6}V_{g6} \\ -\dfrac{1}{R_1}E_M - \dfrac{1}{R_5}E_N + \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_5}\right)E_P = -\dfrac{1}{R_5}V_{g5} - I_{cc1} \end{cases} \tag{1}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo si ottiene:

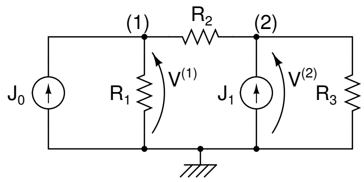
$$\begin{cases} E_M = -\ 0{,}8243\ \text{V} \\ E_N = +\ 1{,}089\ \text{V} \\ E_P = -\ 6{,}800\ \text{V} \end{cases} \tag{2}$$

Esercizio 1

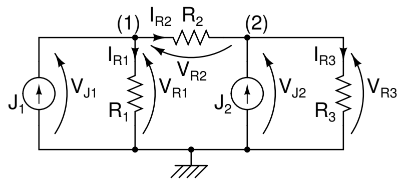


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $J_1 = 5\,\mathrm{mA}$, $J_2 = 15\,\mathrm{mA}$.
Risolvere il circuito.

Soluzione
Si voglia risolvere il circuito attraverso il metodo dei potenziali di nodo. Si fissi quindi un potenziale di riferimento (indicato in figura con il simbolo di massa) e si indichino, rispettivamente, con $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$ le tensioni tra i nodi (1) e (2) ed il nodo di riferimento, come indicato in figura.



Le tensioni e le correnti su tutti i bipoli (con riferimento alla figura seguente per quanto riguarda i versi scelti) possono essere espresse tramite le due tensioni di nodo sopra considerate.



Le tensioni sono date da

$$V_{J1} = V^{(1)}, \quad V_{J2} = V^{(2)}, \quad V_{R1} = V^{(1)}, \quad V_{R2} = V^{(1)} - V^{(2)}, \quad V_{R3} = V^{(2)}$$

mentre le correnti sulle resistenze sono date da

$$I_{R1} = \frac{V^{(1)}}{R_1}, \quad I_{R2} = \frac{V^{(1)} - V^{(2)}}{R_2}, \quad I_{R3} = \frac{V^{(2)}}{R_3}$$

Per risolvere il circuito è sufficiente considerare i bilanci delle tensioni ai due nodi indicati con (1) e (2).

$$(1): \; J_1 - I_{R1} - I_{R2} = 0\,\mathrm{A}, \quad J_1 - \frac{V^{(1)}}{R_1} - \frac{V^{(1)}}{R_2} + \frac{V^{(2)}}{R_2} = 0\,\mathrm{A}$$

$$(2): \; I_{R2} + J_2 - I_{R3} = 0\,\mathrm{A}, \quad \frac{V^{(1)}}{R_2} - \frac{V^{(2)}}{R_2} + J_2 - \frac{V^{(2)}}{R_3} = 0\,\mathrm{A}$$

che formano il sistema

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)V^{(1)}-\dfrac{V^{(2)}}{R_2}=J_1 \\ -\dfrac{V^{(1)}}{R_2}+\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)V^{(2)}=J_2 \end{cases}$$

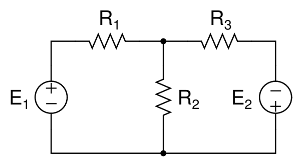
o, in forma matriciale

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}}$$

Il sistema è risolto da

$$\begin{pmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} & \dfrac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ \dfrac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} & \dfrac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}\text{V}$$

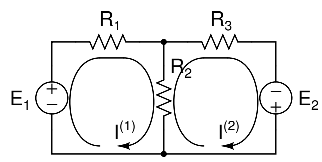
Esercizio 2



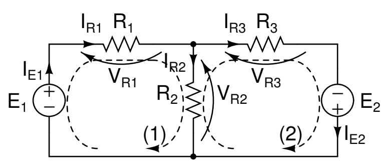
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 2\,\text{k}\Omega$, $E_1 = 10\,\text{V}$, $E_2 = 4\,\text{V}$.
Risolvere il circuito.

Soluzione

Si voglia risolvere il circuito attraverso il metodo delle correnti di anello. Con riferimento alla figura, si individuino i due anelli indicati, e si faccia riferimento alle due correnti $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$.



Le tensioni e le correnti su tutti i bipoli (con riferimento alla figura seguente per quanto riguarda i versi scelti) possono essere espresse tramite le due correnti di anello sopra considerate.



Le correnti sono date da

$$I_{E1} = I^{(1)}, \quad I_{E2} = I^{(2)}, \quad I_{R1} = I^{(1)}, \quad I_{R2} = I^{(1)} - I^{(2)}, \quad I_{R3} = I^{(2)}$$

mentre le tensioni sulle resistenze sono date da

$$V_{R1} = R_1 I^{(1)}, \quad V_{R2} = R_2 \left(I^{(1)} - I^{(2)} \right), \quad V_{R3} = R_3 I^{(2)}$$

Per risolvere il circuito si considerino le equazioni di bilancio delle tensioni alle due maglie indicate con (1) e (2).

$$(1): \; E_1 - V_{R1} - V_{R2} = 0\,\mathrm{V}, \quad E_1 - R_1 I^{(1)} - R_2 I^{(1)} + R_2 I^{(2)} = 0\,\mathrm{V}$$

$$(2): \; V_{R2} - V_{R3} + E_2 = 0\,\mathrm{V}, \quad R_2 I^{(1)} - R_2 I^{(2)} - R_3 I^{(2)} + E_2 = 0\,\mathrm{V}$$

che formano il sistema

$$\boxed{\begin{cases} (R_1 + R_2)\, I^{(1)} - R_2 I^{(2)} = E_1 \\ -R_2 I^{(1)} + (R_2 + R_3)\, I^{(2)} = E_2 \end{cases}}$$

Dalla prima equazione

$$I^{(2)} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} I^{(1)} - \frac{E_1}{R_2}$$

che può essere sostituita nella seconda

$$-R_2 I^{(1)} + (R_2 + R_3)\, \frac{R_1 + R_2}{R_2} I^{(1)} - (R_2 + R_3)\, \frac{E_1}{R_2} = E_2$$

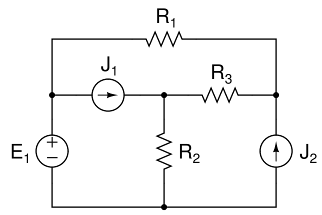
$$I^{(1)} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 + R_2 E_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2) - (R_2)^2} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 + R_2 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 6\,\mathrm{mA}$$

$$I^{(2)} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\, \frac{(R_2 + R_3)E_1 + R_2 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} - \frac{E_1}{R_2} =$$

$$= \frac{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)E_1 - (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)E_1 + R_2(R_1 + R_2)E_2}{R_2(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} =$$

$$= \frac{R_2 E_1 + (R_1 + R_2)E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 4\,\mathrm{mA}$$

Esercizio 3



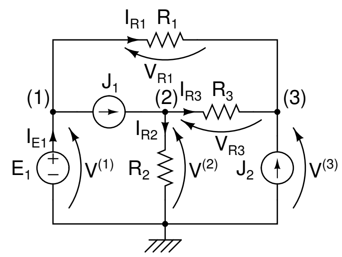
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $E_1 = 15\,\mathrm{V}$, $J_1 = 3\,\mathrm{mA}$, $J_2 = 8\,\mathrm{mA}$.

Determinare le tensioni sulle tre resistenze.

Soluzione

Si voglia risolvere il circuito attraverso il metodo dei potenziali di nodo.

Fissato un potenziale di riferimento (indicato in figura con il simbolo di massa) si indichino con $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ e $V^{(3)}$ le tensioni ai tre nodi. Si scelgano inoltre versi di correnti e tensioni come indicato in figura.



Si noti che il generatore di tensione E_1 impone il vincolo $V^{(1)} = E_1$. La tensione $V^{(1)}$ è quindi nota e può essere non considerata come incognita del problema. Per quanto riguarda tensione e corrente sulle resistenze si ha

$$V_{R1} = V^{(1)} - V^{(3)} = E_1 - V^{(3)}, \quad V_{R2} = V^{(2)}, \quad V_{R3} = V^{(2)} - V^{(3)}$$

$$I_{R1} = \frac{E_1 - V^{(3)}}{R_1}, \quad I_{R2} = \frac{V^{(2)}}{R_2}, \quad I_{R3} = \frac{V^{(2)} - V^{(3)}}{R_3}$$

Per risolvere il circuito è necessario considerare i bilanci delle tensioni ai tre nodi indicati con (1), (2) e (3).

$$(1): \; I_{E1} - J_1 - I_{R1} = 0\,\mathrm{A}, \quad I_{E1} - J_1 - \frac{E_1}{R_1} + \frac{V^{(3)}}{R_1} = 0\,\mathrm{A}$$

$$(2): \; J_1 - I_{R2} - I_{R3} = 0\,\mathrm{A}, \quad J_1 - \frac{V^{(2)}}{R_2} - \frac{V^{(2)}}{R_3} + \frac{V^{(3)}}{R_3} = 0\,\mathrm{A}$$

$$(3): \; I_{R1} + I_{R3} + J_2 = 0\,\mathrm{A}, \quad \frac{E_1}{R_1} - \frac{V^{(3)}}{R_1} + \frac{V^{(2)}}{R_3} - \frac{V^{(3)}}{R_3} + J_2 = 0\,\mathrm{A}$$

che formano il sistema

$$\begin{cases} -I_{E1} - \dfrac{V^{(3)}}{R_1} = -J_1 - \dfrac{E_1}{R_1} \\ \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) V^{(2)} - \dfrac{V^{(3)}}{R_3} = J_1 \\ -\dfrac{V^{(2)}}{R_3} + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}\right) V^{(3)} = J_2 + \dfrac{E_1}{R_1} \end{cases}$$

Quello ottenuto e un sistema a tre equazioni e tre incognite, dove la tensione $V^{(1)}$ è stata sostituita dalla I_{E1}. In realtà, considerando solo la seconda e la terza equazione, si ha un sistema a due equazioni nelle sole incognite $V^{(2)}$ e $V^{(3)}$, la cui soluzione è

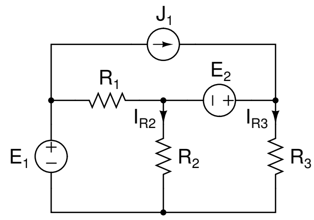
$$V^{(2)} = R_2 \frac{E_1 + (R_1 + R_3)J_1 + R_1 J_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 7\,\mathrm{V}$$

$$V^{(3)} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 + R_1 R_2 J_1 + R_1(R_2 + R_3)J_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 19\,\mathrm{V}$$

La soluzione dell'esercizio è

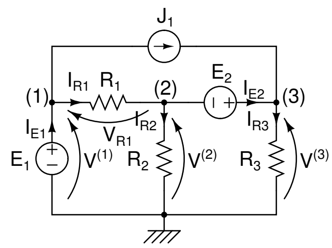
$$V_{R1} = E_1 - V^{(3)} = -4\,\mathrm{V}, \quad V_{R2} = V^{(2)} = 7\,\mathrm{V}, \quad V_{R3} = V^{(2)} - V^{(3)} = -12\,\mathrm{V}$$

Esercizio 4



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $E_1 = 4\,\mathrm{V}$, $E_2 = 3\,\mathrm{V}$, $J_1 = 2\,\mathrm{mA}$.
Determinare le correnti I_{R2} e I_{R3}.

Soluzione
Si voglia risolvere il circuito attraverso il metodo dei potenziali di nodo.
Fissato un potenziale di riferimento (indicato in figura con il simbolo di massa) si indichino con $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$ e $V^{(3)}$ le tensioni ai tre nodi. Si scelgano inoltre versi di correnti e tensioni come indicato in figura.



Sia il generatore di tensione E_1 sia il generatore di tensione E_2 impongono due vincoli alle tensioni di nodo. Il primo vincolo è dato da $V^{(1)} = E_1$, mentre il secondo da $V^{(3)} = V^{(2)} + E_2$. Delle tre tensioni di nodo, solo una è un'incognita del problema. Con queste osservazioni, si può scrivere

$$V_{R1} = V^{(1)} - V^{(2)} = E_1 - V^{(2)}, \quad V_{R2} = V^{(2)}, \quad V_{R3} = V^{(3)} = V^{(2)} + E_2$$

$$I_{R1} = \frac{E_1 - V^{(2)}}{R_1}, \quad I_{R2} = \frac{V^{(2)}}{R_2}, \quad I_{R3} = \frac{V^{(2)} + E_2}{R_3}$$

Si considerino ora i bilanci delle tensioni ai tre nodi indicati con (1), (2) e (3).

$$\begin{aligned} (1):\ & I_{E1} - I_{R1} - J_1 = 0\,\mathrm{A}, \\ (2):\ & I_{R1} - I_{R2} - I_{E2} = 0\,\mathrm{A}, \\ (3):\ & I_{E2} + J_2 - I_{R3} = 0\,\mathrm{A}, \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} & I_{E1} - \frac{E_1}{R_1} + \frac{V^{(2)}}{R_1} - J_1 = 0\,\mathrm{A} \\ & \frac{E_1}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_2} - I_{E2} = 0\,\mathrm{A} \\ & I_{E2} + J_2 - \frac{V^{(2)}}{R_3} - \frac{E_2}{R_3} = 0\,\mathrm{A} \end{aligned}}$$

Per determinare la tensione $V^{(2)}$ non è necessario risolvere l intero sistema. Infatti dall'equazione (2) si ha

$$I_{E2} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_2}$$

che può essere sostituita nella (3) per ottenere

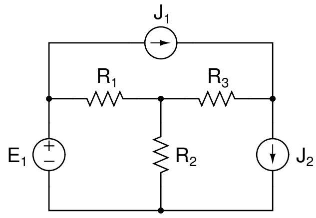
$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_1} - \frac{V^{(2)}}{R_2} + J_2 - \frac{V^{(2)}}{R_3} - \frac{E_2}{R_3} = 0\,\mathrm{A}$$

$$V^{(2)} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_2}{R_3} + J_2}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = R_2 \frac{R_3 E_1 - R_1 E_2 + R_1 R_3 J_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3\,\mathrm{V}$$

La soluzione del problema è dunque

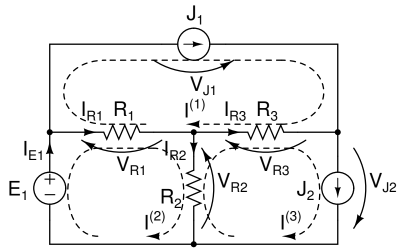
$$I_{R2} = \frac{V^{(2)}}{R_2} = 1\,\mathrm{mA}, \quad I_{R3} = \frac{V^{(2)} + E_2}{R_3} = 2\,\mathrm{mA}$$

Esercizio 5



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $E_1 = 7\,\mathrm{V}$, $J_1 = 3\,\mathrm{mA}$, $J_2 = 4\,\mathrm{mA}$.
Determinare la potenza dissipata sulla resistenza R_2.

Soluzione
Si risolva il circuito attraverso il metodo delle correnti di anello. Sono tre gli anelli che compongono il circuito, e quindi tre le correnti ($I^{(1)}$, $I^{(2)}$ e $I^{(3)}$ con riferimento alla figura) da determinare.



In realtà, i generatori di corrente J_1 e J_2 impongono i due vincoli

$$I^{(1)} = J_1, \quad I^{(3)} = J_2,$$

che fanno sì che solo una delle tre correnti di anello sia incognita.
Dati i versi di tensioni e correnti come in figura, si ha che

$$I_{E1} = I^{(2)}, \quad I_{R1} = I^{(2)} - I^{(1)} = I^{(2)} - J_1,$$
$$I_{R2} = I^{(2)} - I^{(3)} = I^{(2)} - J_2, \quad I_{R3} = I^{(3)} - I^{(2)} = J_2 - J_1 = 1\,\mathrm{mA}$$
$$V_{R1} = R_1 I^{(2)} - R_1 J_1, \quad V_{R2} = R_2 I^{(2)} - R_2 J_2, \quad V_{R3} = R_3 J_2 - R_3 J_1 = 1\,\mathrm{V}$$

Il circuito è risolto considerando le equazioni di bilancio delle tensioni alle tre maglie corrispondenti alle correnti $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ e $I^{(3)}$.

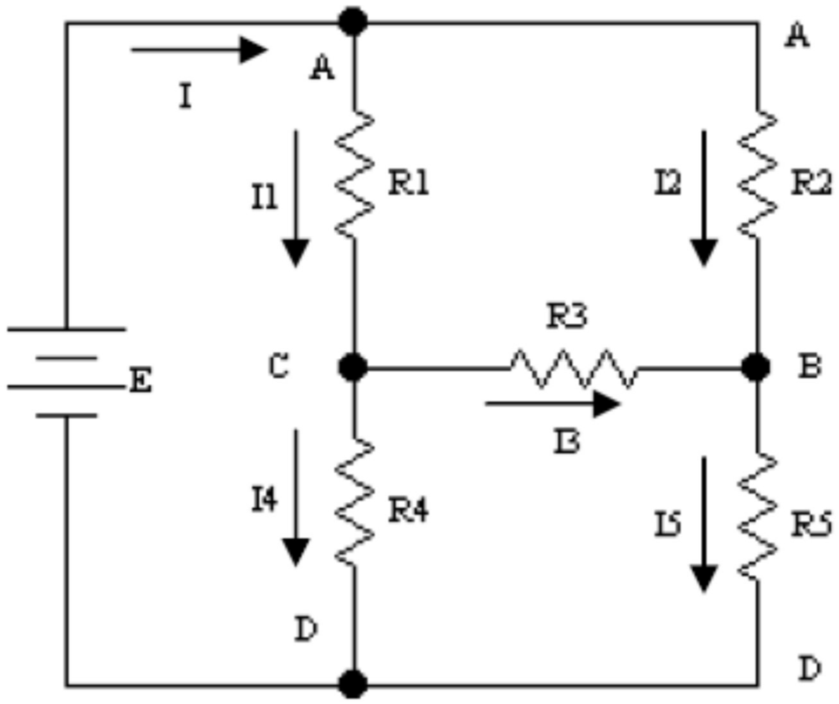
$$\begin{aligned}
(1):\ V_{R1} + V_{J1} + V_{R3} = 0\,\mathrm{V}, &\quad R_1 I^{(2)} - R_1 J_1 + V_{J1} + R_3 J_2 - R_3 J_1 = 0\,\mathrm{V}\\
(2):\ E_1 - V_{R1} - V_{R2} = 0\,\mathrm{V}, &\quad E_1 - R_1 I^{(2)} + R_1 J_1 - R_2 I^{(2)} + R_2 J_2 = 0\,\mathrm{V}\\
(3):\ V_{R2} - V_{R3} + V_{J2} = 0\,\mathrm{V}, &\quad R_2 I^{(2)} - R_2 J_2 - R_3 J_2 + R_3 + V_{J2} = 0\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Per quanto richiesto dall'esercizio, è sufficiente considerare l'equazione (2), che ha come soluzione

$$I^{(2)} = \frac{E_1 + R_1 J_1 + R_2 J_2}{R_1 + R_2} = 5\,\mathrm{mA}$$

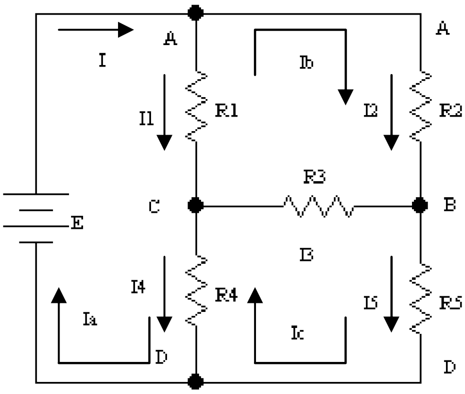
da cui

$$I_{R2} = I^{(2)} - J_2 = 1\,\mathrm{mA}, \quad P_{R2} = R_2\,(I_{R2})^2 = 1\,\mathrm{mW}$$



$E_1 = 12V$;
$R_1 = R_3 = 2k\Omega$;
$R_2 = R_4 = 4k\Omega$;
$R_5 = 3k\Omega$.

Si fissano i versi delle correnti cicliche e di percorrenza delle maglie come in figura e si scrivono le equazioni alle maglie applicando il secondo principio di Kirchhoff.



$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad E = R_1(I_a - I_b) + R_4(I_a - I_c) \\ \text{maglia} \quad b \quad 0 = R_1(I_b - I_a) + R_2 I_b + R_3(I_b - I_c) \\ \text{maglia} \quad a \quad 0 = R_3(I_c - I_b) + R_4(I_c - I_a) + R_5 I_c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 I_a - R_1 I_b + R_4 I_a - R_4 I_c = E \\ R_1 I_b - R_1 I_a + R_2 I_b + R_3 I_b - R_3 I_c = 0 \\ R_3 I_c - R_3 I_b + R_4 I_c - R_4 I_a + R_5 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (R_1 + R_4) I_a - R_1 I_b - R_4 I_c = E \\ -R_1 I_a + (R_1 + R_2 + R_3) I_b - R_3 I_c = 0 \\ -R_4 I_a - R_3 I_b + (R_3 + R_4 + R_5) I_c = 0 \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 12 \\ -2 \cdot 10^3 I_a + 8 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 0 \\ -4 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b + 9 \cdot 10^3 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ -I_a + 4 I_b - I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_a = 4 I_b - I_c \quad \Rightarrow \\ -4 I_a - 2 I_b + 9 I_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_a = 4 I_b - I_c \\ -16 I_b + 4 I_c - 2 I_b + 9 I_c = 0 \\ 12 \cdot 10^3 I_b - 3 \cdot 10^3 I_c - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_a = 4 I_b - I_c \\ -18 I_b + 13 I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{18}{13} I_b \quad \Rightarrow \\ 11 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 I_c = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 11 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 \cdot \frac{18}{13} I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{53}{13} \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad I_b = \frac{13 \cdot 6}{53} \cdot 10^{-3} = 1{,}47\,\text{mA}$$

$$I_c = \frac{18}{13} I_b = \frac{18}{13} \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 2{,}04\,\text{mA} \qquad I_a = 4 I_b - I_c = 4 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} - 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 3{,}84\,\text{mA}$$

$I = I_a = 3{,}84mA$ $\quad$ $I_1 = I_a - I_b = 3{,}84 \cdot 10^{-3} - 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 2{,}37mA$

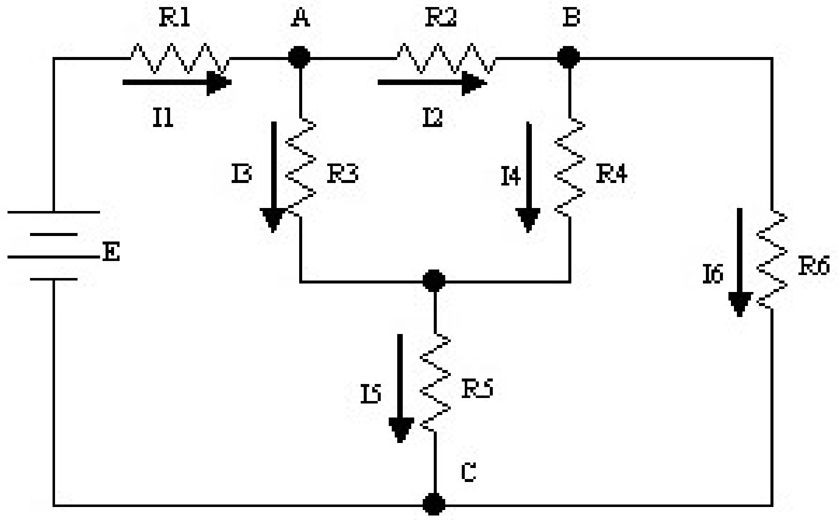
$I_2 = I_b = 1{,}47mA$ $\quad$ $I_3 = I_c - I_b = 2{,}04 \cdot 10^{-3} - 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 0{,}57mA$

$I_4 = I_a - I_c = 3{,}84 \cdot 10^{-3} - 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 1{,}8mA$ $\quad$ $I_5 = I_c = 2{,}04mA$

$V_{AC} = V_1 = R_1 I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}37 \cdot 10^{-3} = 4{,}74V$ $\quad$ $V_{AB} = V_2 = R_2 I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 5{,}88V$

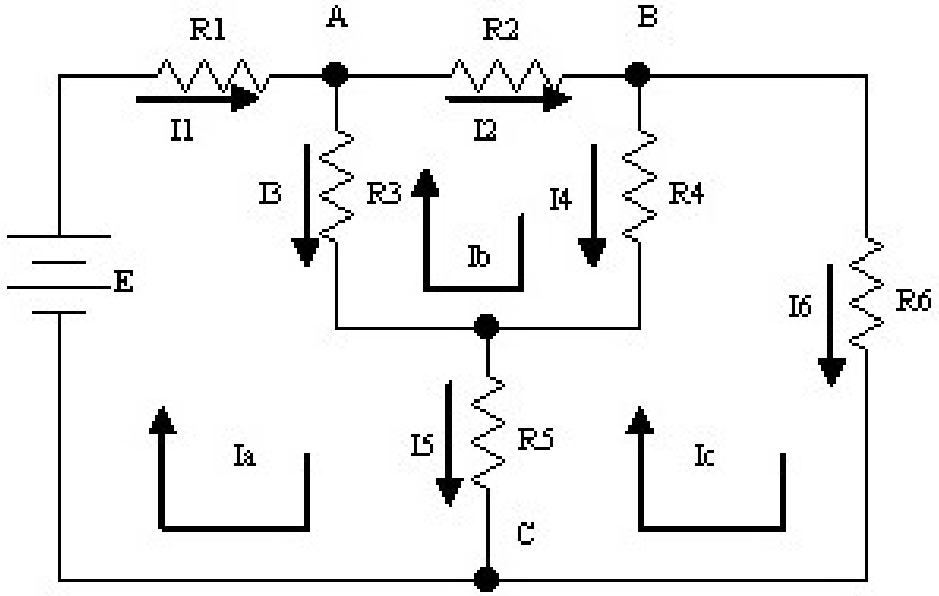
$V_{CB} = V_3 = R_3 I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}57 \cdot 10^{-3} = 1{,}14V$ $\quad$ $V_{CD} = V_4 = R_4 I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} = 7{,}2V$

$V_{BD} = V_5 = R_5 I_5 = 3 \cdot 10^3 \cdot 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 6{,}12V$



$E_1 = 12V$;
$R_1 = R_3 = 2k\Omega$;
$R_2 = R_4 = 1k\Omega$;
$R_5 = R_6 = 4k\Omega$.

Si fissano i versi delle correnti degli anelli come in figura e si scrivono le equazioni alle maglie.



$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad E = R_1 I_a + R_3(I_a - I_b) + R_5(I_a - I_c) \\ \text{maglia} \quad b \quad 0 = R_2 I_b + R_3(I_b - I_a) + R_4(I_b - I_c) \\ \text{maglia} \quad a \quad 0 = R_4(I_c - I_b) + R_5(I_c - I_a) + R_6 I_c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 I_a + R_3 I_a - R_3 I_b + R_5 I_a = E \\ R_2 I_b + R_3 I_b - R_3 I_a + R_4 I_b - R_4 I_c = 0 \\ R_4 I_c - R_4 I_b + R_5 I_c - R_5 I_a + R_6 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_5) I_a - R_3 I_b - R_5 I_c = E \\ -R_3 I_a + (R_2 + R_3 + R_4) I_b - R_4 I_c = 0 \\ -R_5 I_a - R_4 I_b + (R_4 + R_5 + R_6) I_c = 0 \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 12 \\ -2 \cdot 10^3 I_a + 4 \cdot 10^3 I_b - 1 \cdot 10^3 I_c = 0 \\ -4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b + 9 \cdot 10^3 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ -2 I_a + 4 I_b - I_c = 0 \\ -4 I_a - I_b + 9 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I_c = -2 I_a + 4 I_b \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_c = -2 I_a + 4 I_b \\ -4 I_a - I_b - 18 I_a + 36 I_b = 0 \\ 4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b + 4 \cdot 10^3 I_a - 8 \cdot 10^3 I_b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_c = -2 I_a + 4 I_b \\ -22 I_a + 35 I_b = 0 \\ 8 \cdot 10^3 I_a - 9 \cdot 10^3 I_b = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad I_a = \frac{35}{22} I_b \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8 \cdot 10^3 \cdot \frac{35}{22} I_b - 9 \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{41}{11} \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad I_b = \frac{11 \cdot 6}{41} \cdot 10^{-3} = 1{,}61\text{mA}$$

$$I_a = \frac{35}{22} I_b = \frac{35}{22} \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 2{,}56\text{mA}$$

$I_c = -2 I_a + 4 I_b = -2 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 1{,}32\text{mA}$ $\qquad$ $I_1 = I_a = 2{,}56\text{mA}$

$I_2 = I_b = 1{,}61\text{mA}$ $\qquad$ $I_3 = I_a - I_b = 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 0{,}95\text{mA}$

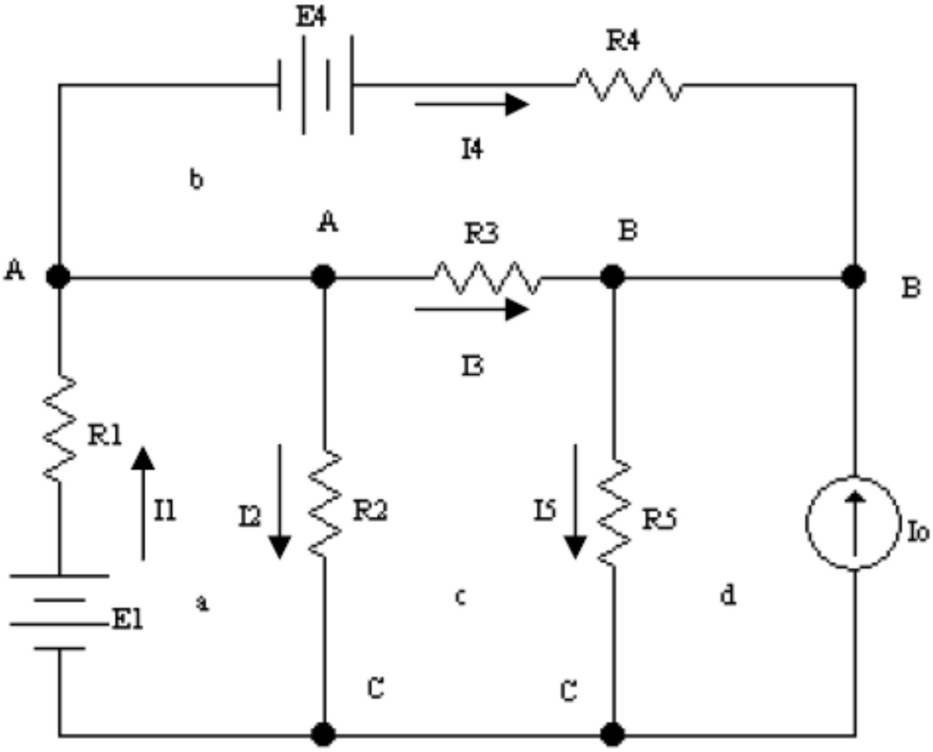
$I_4 = I_b - I_c = 1{,}61 \cdot 10^{-3} - 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 0{,}29\text{mA}$ $\qquad$ $I_6 = I_c = 1{,}32\text{mA}$

$I_5 = I_a - I_c = 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 1{,}24\text{mA}$

$V_1 = R_1 I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-3} = 5{,}12\text{V}$ $\qquad$ $V_2 = R_2 I_2 = 1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 1{,}61\text{V}$

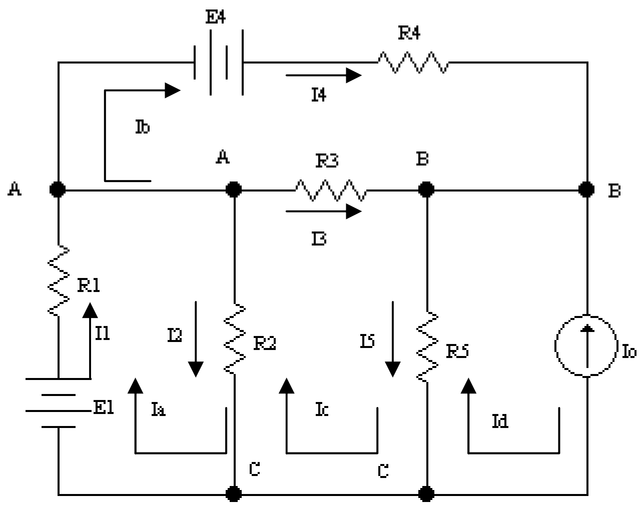
$V_3 = R_3 I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}95 \cdot 10^{-3} = 1{,}9\text{V}$ $\qquad$ $V_4 = R_4 I_4 = 1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}29 \cdot 10^{-3} = 0{,}29\text{V}$

$V_5 = R_5 I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-3} = 4{,}96\text{V}$ $\qquad$ $V_6 = R_6 I_6 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 5{,}28\text{V}$



$E_1 = 6V$; $E_4 = 4V$;
$I_0 = 2mA$;
$R_1 = R_5 = 2k\Omega$;
$R_2 = R_3 = 4k\Omega$;
$R_4 = 1k\Omega$.

1. Si attribuisce a ciascuna maglia adiacente una corrente ciclica fittizia in senso orario: I_a, I_b, I_c, I_d. si esplicitano le correnti nei rami (I_1, I_2, I_3, I_4 I_5) in funzione delle correnti cicliche.



$I_1 = I_a$

$I_2 = I_a - I_c$

$I_3 = I_c - I_b$

$I_4 = I_b$

$I_5 = I_c - I_d = I_c + I_o$

Poiché nella maglia d è presente un generatore di corrente, si ha: I_d = - I_o = 2mA. Restano, dunque, tre incognite: I_a , I_b , I_c.

2. Si scrivono le equazioni alle maglie a, b, c.

$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad R_1 I_a + R_2 (I_a - I_c) = E_1 \\ \text{maglia} \quad b \quad R_3 (I_b - I_c) + R_4 I_b = E_4 \\ \text{maglia} \quad a \quad R_2 (I_c - I_a) + R_3 (I_c - I_b) + R_5 (I_c - I_o) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 I_a + R_2 I_a - R_2 I_c = E_1 & \Rightarrow \boxed{(R_1 + R_2) I_a - R_2 I_c = E_1} \\ R_3 I_b - R_3 I_c + R_4 I_b = E_4 & \Rightarrow \boxed{(R_3 + R_4) I_b - R_3 I_c = E_4} \\ R_2 I_c - R_2 I_a + R_3 I_c - R_3 I_b + R_5 I_c - R_5 I_o = 0 & \Rightarrow \boxed{-R_2 I_a - R_3 I_b + (R_2 + R_3 + R_5) I_c = -R_5 I_o} \end{cases}$$

3. Si sostituiscono i valori noti e si risolve il sistema.

$$\begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_c = 6 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_c = 3 \\ 5 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 4 \\ -4 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_b + 10 \cdot 10^3 I_c = -4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 10^3 I_a + 2 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 I_c = 2 \end{cases}$$

Dalla prima non semplificata si sottrae la terza moltiplicata per 3.

$$\begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ \underline{6 \cdot 10^3 I_a + 6 \cdot 10^3 I_b - 15 \cdot 10^3 I_c = 6} \end{cases}$$

$$-6 \cdot 10^3 I_b + 11 \cdot 10^3 I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad -6 \cdot I_b + 11 \cdot I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{6}{11} I_b$$

Si sostituisce nella seconda e si ricava I_b e poi I_c.

$$5 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{6}{11} I_b \right) = 4 \quad \Rightarrow \quad 55 \cdot 10^3 I_b - 24 \cdot 10^3 \cdot I_b = 44 \quad \Rightarrow \quad 31 \cdot 10^3 I_b = 44 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_b = \frac{44}{31 \cdot 10^3} = 1{,}42 mA \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{6}{11} I_b = \frac{6}{11} \cdot 1{,}42 \cdot 10^{-3} = 0{,}77 mA$$

Sostituendo I_c nella prima si calcola I_a.

$$3 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}77 \cdot 10^{-3} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 10^3 I_a = 4{,}54 \quad \Rightarrow \quad I_a = \frac{4{,}54}{3 \cdot 10^3} = 1{,}51 mA$$

Le correnti reali nei rami sono:

$$I_1 = I_a = 1{,}51 mA \quad ; \quad I_2 = I_a - I_c = 1{,}51 \cdot 10^{-3} - 0{,}77 \cdot 10^{-3} = 0{,}74 mA$$

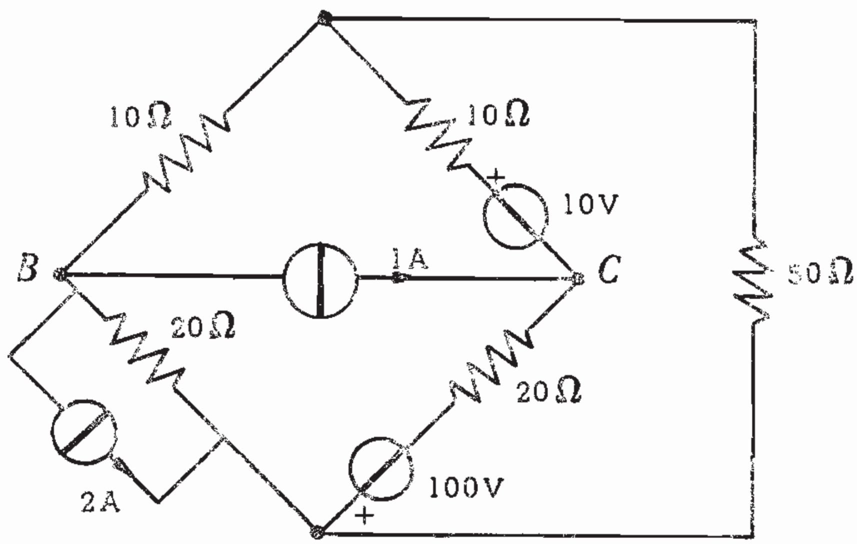
$$I_3 = I_c - I_b = 0{,}77 \cdot 10^{-3} - 1{,}42 \cdot 10^{-3} = -0{,}65 mA \quad ; \quad I_4 = I_b = 1{,}42 mA$$

$$I_5 = I_c + I_o = 0{,}77 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = 2{,}77 mA$$

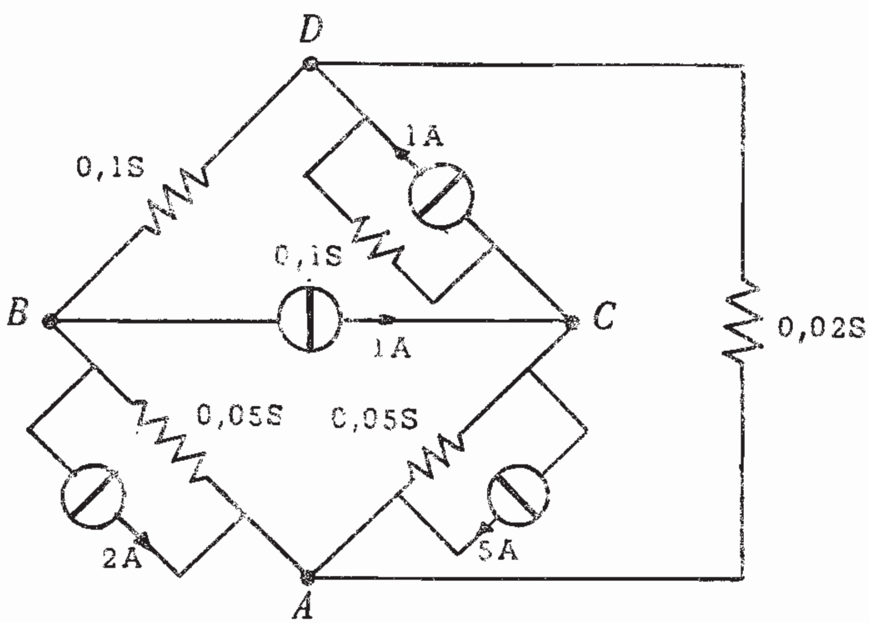
Il verso effettivo della corrente I_3 è opposto a quello scelto.

Esercizio: 60.

Si risolva con il modo dei potenziali la seguente rete:



Si trasformino i lati tipo serie in lati tipo parallelo



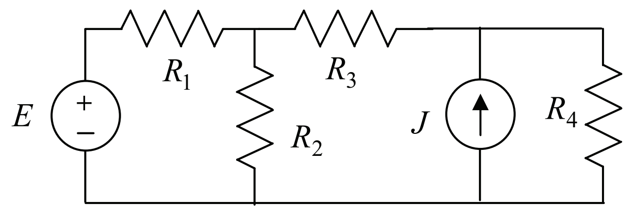
Si scelga come riferimento il nodo B. Le incognite sono in tal caso V_D, V_C e V_A; le equazioni di Kirchhoff, scritte ad esempio ai nodi A, B e C sono (si ricordi che è $V_B = 0$):

$$2 + 5 = V_A(0,05 + 0,05 + 0,02) - V_C \cdot 0,05 - V_D \cdot 0,02$$

$$-1 - 2 = -V_D \cdot 0,1 - V_A \cdot 0,05$$

$$1 - 1 - 5 = V_C(0,1 + 0,05) - V_D \cdot 0,1 - V_A \cdot 0,05 \; .$$

<u>ES. 4.3</u> - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali modificato calcolare la potenza erogata dai due generatori e la potenza assorbita dai resistori (verificare la conservazione delle potenze).

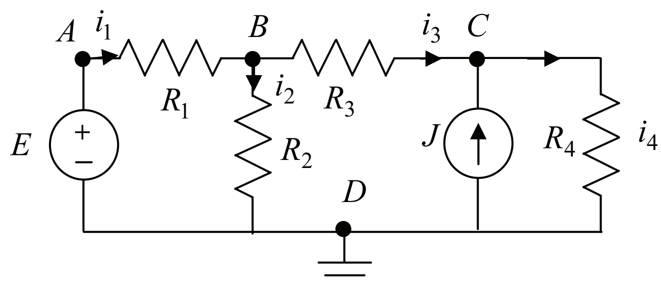


$E = 50\,V \quad J = 60\,A$

$R_1 = 5\,\Omega \quad R_2 = 40\,\Omega$

$R_3 = 80\,\Omega \quad R_4 = 120\,\Omega$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi: e_A, e_B, e_C . Per la presenza del generatore di tensione tra nodo A e nodo D, si ha banalmente $e_A = E$. Con le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = E - e_B,\ v_2 = e_B,\ v_3 = e_B - e_C,\ v_4 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi B e C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 = J \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)e_B - G_3 e_C = G_1 E \\ -G_3 e_B + (G_3 + G_4)e_C = J \end{cases}}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_B = 0.20\,kV, \quad e_C = 3.00\,kV\,.$$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori si ha:

$$P_E^{erog} = Ei_E = Ei_1 = EG_1 v_1 = EG_1(E - e_B) = -1.50\,kW$$

$$P_J^{erog} = Jv_J = Jv_4 = Je_C = 180.00\,kW$$

$$P_{R_1} = G_1 v_1^2 = G_1 (E - e_B)^2 = 4.50\,kW$$

$$P_{R_2} = G_2 v_2^2 = G_2 e_B^2 = 1.00\,kW$$

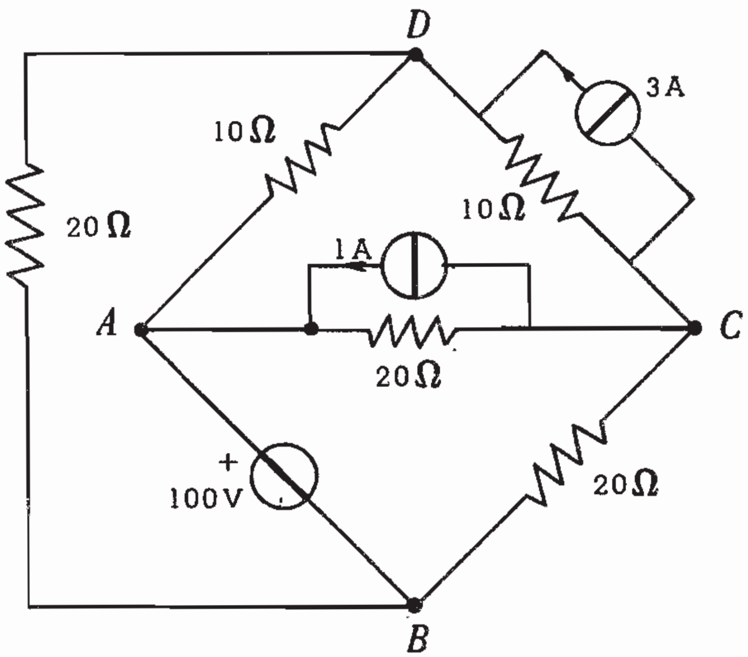
$$P_{R_3} = G_3 v_3^2 = G_3 (e_B - e_C)^2 = 98.00\,kW$$

$$P_{R_4} = G_4 v_4^2 = G_4 e_C^2 = 75.00\,kW$$

È facile verificare che $P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_E^{erog} + P_J^{erog}$.

Esercizio: 61.

Si risolva con il metodo dei potenziali la seguente rete:



I lati sono già tutti del tipo parallelo; fa eccezione il lato *A B* che è costituito da un generatore di tensione.

Scrivendo l'equazione di Kirchhoff al nodo *A* oppure al nodo *B*, estremi del generatore di tensione, è necessario introdurre come nuova incognita la corrente I_{AB} che lo attraversa.

Infatti non è possibile per il lato *A B* esprimere tale corrente direttamente in funzione dei potenziali V_A e V_B.

A compensare la presenza di un'altra incognita, oltre ai potenziali, si ha, oltre alle equazioni ai nodi, la relazione $V_A - V_B = 100$.

Scegliendo *B* come nodo di riferimento e scrivendo le equazioni ai nodi *A*, *D* e *C* si ottiene il sistema (la corrente I_{AB} è stata considerata uscente dal nodo *A* ed entrante nel nodo *B*)

$$1 - I_{AB} = 100\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) - V_C\,\frac{1}{20} - V_D\,\frac{1}{10}$$

$$3 = V_D\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) - V_A\,\frac{1}{10} - V_C\,\frac{1}{10}$$

$$-3 - 1 = V_C\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) - V_A\,\frac{1}{20} - V_D\,\frac{1}{10}$$

$$V_A = 100.$$

Si noti che, nel particolare esercizio proposto, è possibile non introdurre la corrente I_{AB} come nuova incognita, limitandosi a scrivere le equazioni di Kirchhoff ai nodi *C* e *D* che non sono estremi del generatoe di tensione. Scegliendo ad esempio il nodo D come riferimento le equazioni in tal caso diventano:

$$V_A - V_B = 100$$

$$-3 - 1 = V_C \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) - V_B \frac{1}{20} - V_A \frac{1}{20} \quad *$$

$$3 = - V_A \frac{1}{10} - V_B \frac{1}{20} - V_C \frac{1}{10}$$

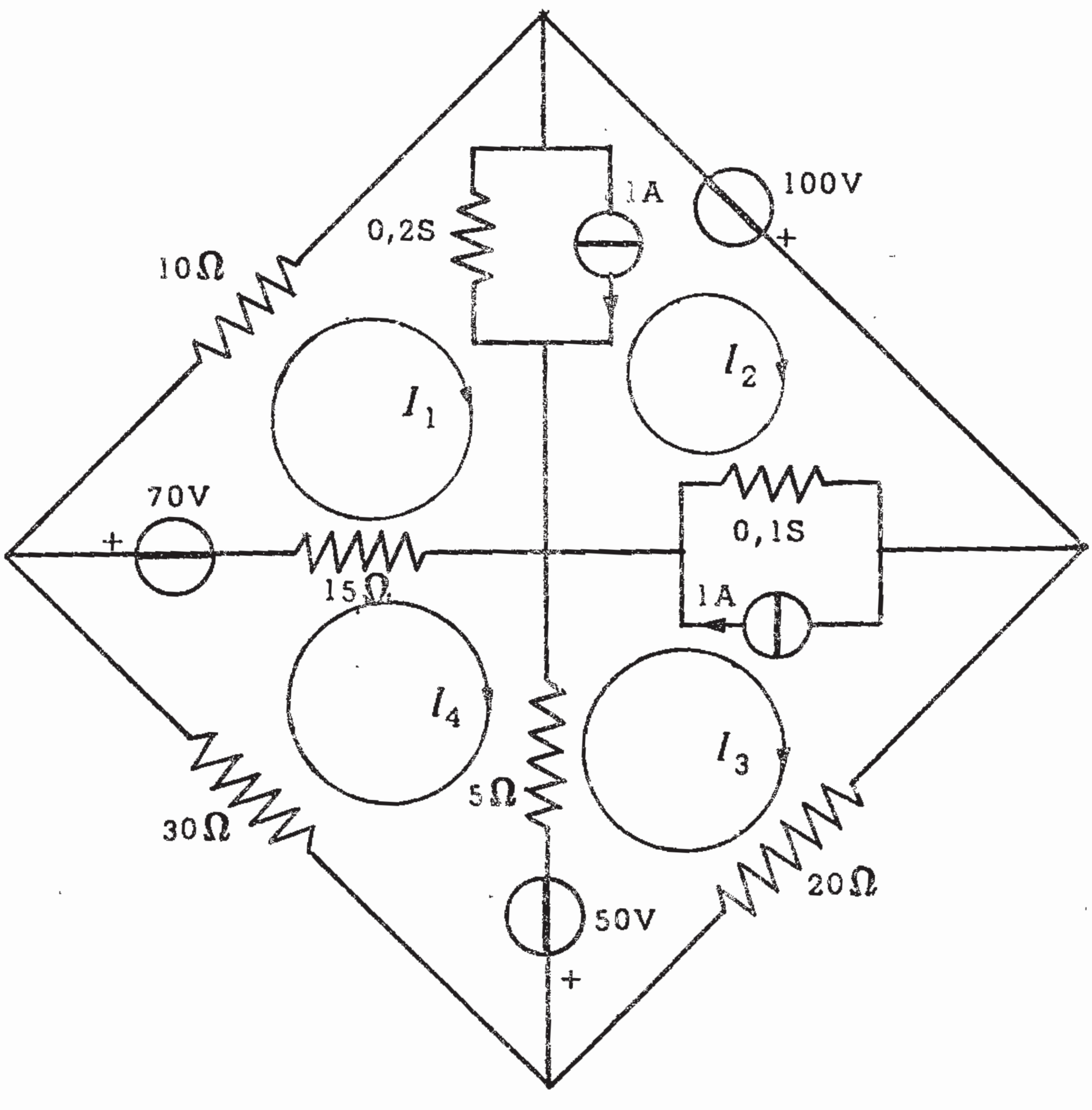
Si noti ancora che i potenziali V_A, V_B e V_C ricavata dalle equazioni * permettono di ricavare immediatamente mediante l'equazione

$$I = A + G V$$

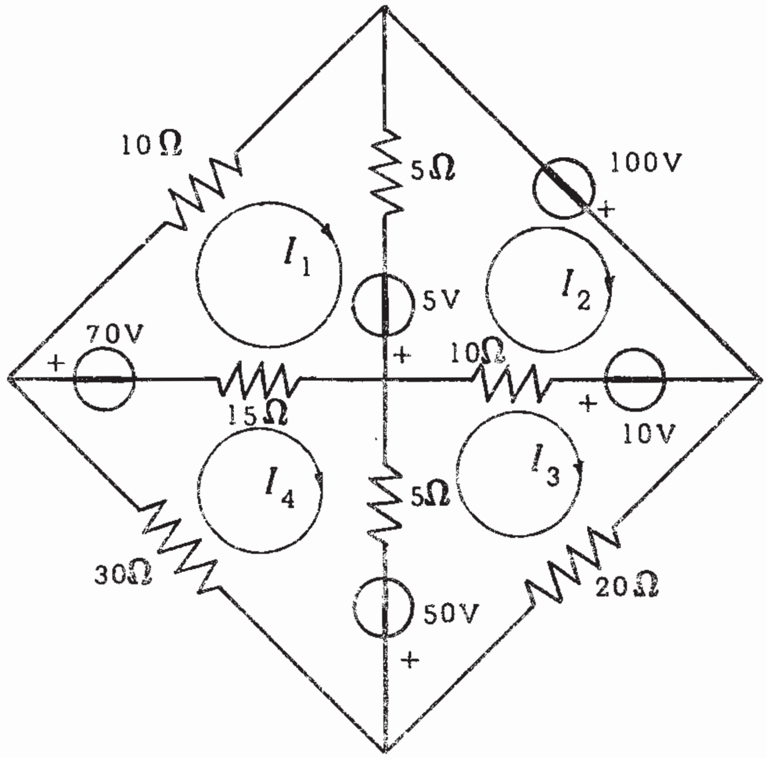
le correnti in tutti i lati tranne che nel lato $A B$. Essa deve essere invece ricavata con un'equazione al nodo, ad esempio dopo aver determinato I_{AD} e I_{AC}.

Esercizio: 62.

Risolvere con il metodo delle correnti cicliche la seguente rete:



Si trasformino i rami del circuito tipo parallelo in rami tipo serie.

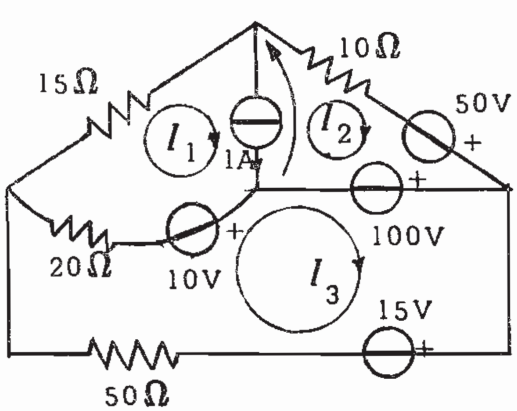


Le equazioni alle maglie che determinano le correnti cicliche, scritte nell'ordine per le maglie 1, 2, 3 e 4 sono:

$$\boxed{\begin{aligned} 5 + 70 &= I_1(5 + 10 + 15) - 5I_2 - 15I_4 \\ 100 - 5 &= I_2(100 + 10 + 5) - 5I_1 - 10I_3 \\ -10 - 50 &= I_3(20 + 5 + 10) - 10I_2 - 5I_4 \\ -70 + 50 &= I_4(15 + 5 + 30) - 15I_1 - 5I_3 \ . \end{aligned}}$$

Esercizio: 63.

Si risolva con il metodo delle correnti cicliche la seguente rete.



Si osservi che scrivendo le equazioni relative alla maglia 1 e 2 occorre introdurre come nuova incognita la tensione V sul generatore di corrente. Essa infatti non può essere espressa direttamente in funzione delle correnti cicliche.

Alle equazioni alle maglie si

aggiunge però l'equazione

$$I_1 - I_2 = 1$$

Il sistema delle equazioni che determinano le correnti cicliche e la tensione V, con la convenzione indicata, si può scrivere come

$$\boxed{\begin{gathered} -10 - V = I_1(15 + 20) - 20\,I_3 \\ V + 50 - 100 = I_2 \cdot 10 \\ 20 + 100 - 15 = I_3(20 + 100 + 50) - I_1\,20 \\ I_1 - I_2 = 1\,. \end{gathered}}$$

Esercizio 2.4

Data la rete di fig. 1, determinare l'intensità della corrente I *che attraversa il resistore di resistenza* R_4.

$V_{g1} = V_{g2} = 10\ V$

$I_{g1} = I_{g2} = 5\ V$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$

$R_4 = 10\ \Omega$

$R_5 = 5\ \Omega$

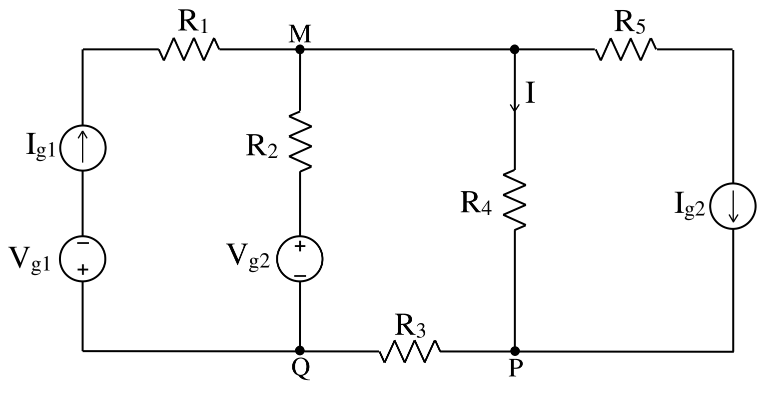


Figura 1

a) Metodo del potenziale ai nodi.

Senza effettuare trasformazioni il circuito ha 5 nodi come in fig. 2:

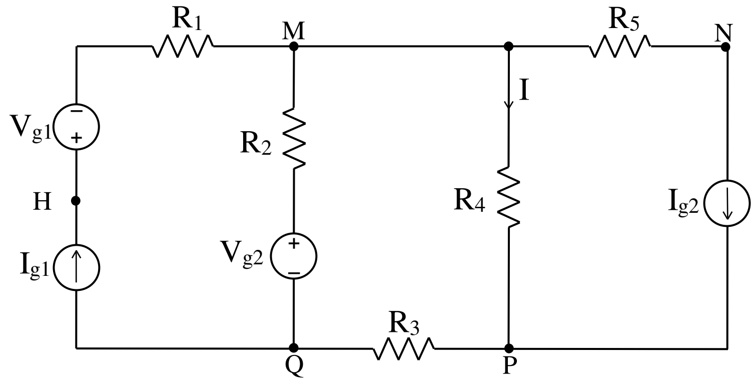


Figura 2

Trasformando i lati Thevenin in equivalenti lati Norton si ottiene il circuito di fig.3:

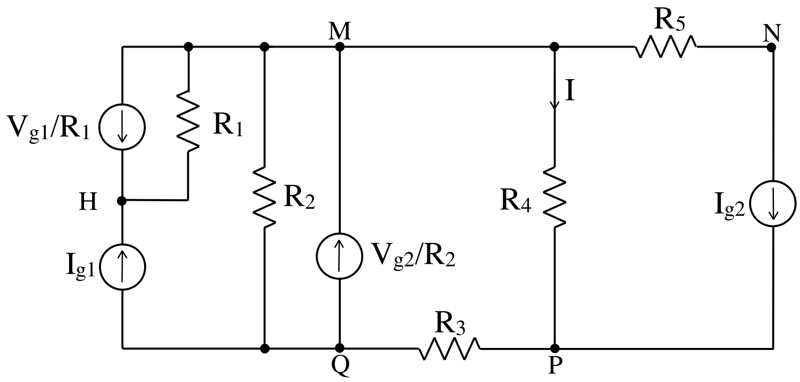


Figura 3

Scelto il nodo P come nodo di riferimento, si ha il sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_M \\ E_Q \\ E_N \\ E_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}V_{g2}-\frac{1}{R_1}V_{g1} \\ -I_{g1}-\frac{1}{R_2}V_{g2} \\ -I_{g2} \\ I_{g1}-\frac{1}{R_1}V_{g1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nella prima, si ha il sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_M \\ E_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1}+\frac{1}{R_2}V_{g2}-I_{g2} \\ -I_{g1}-\frac{1}{R_2}V_{g2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

che è quello che si sarebbe ottenuto se avessimo semplificato il circuito eliminando gli elementi in serie ai generatori di corrente. Risolto con i valori numerici proposti, dà

$$E_M = -\frac{150}{17}\ \text{V} \tag{5}$$

e quindi:

$$I = \frac{E_M}{R_4} = -\frac{15}{17} = -0{,}8824\ \text{A} \tag{6}$$

b) Metodo delle correnti di maglia.

La rete comprende una sola maglia incognita, la cui corrente ciclica si indichi con J (circolante in senso orario):

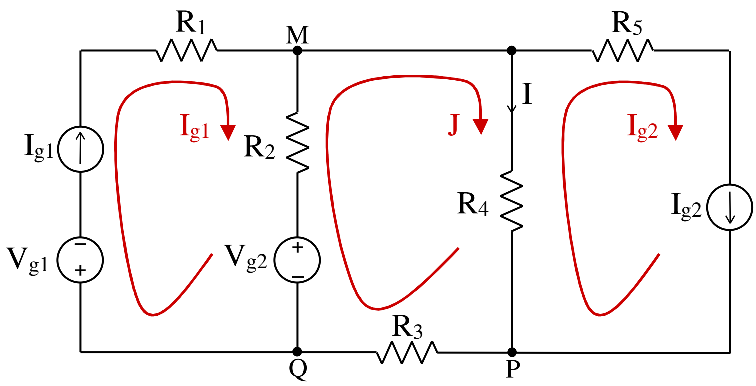


Figura 4

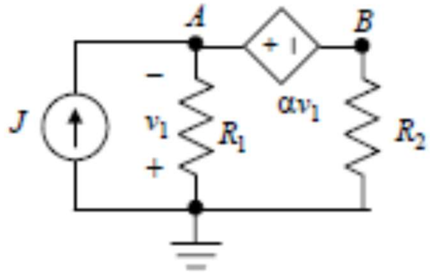
Pertanto il sistema risolvente si riduce alla sola equazione dell'anello percorso dalla corrente J:

$$(R_2 + R_3 + R_4)J = V_{g2} + R_2 I_{g1} + R_4 I_{g2} \tag{7}$$

da cui:

$$I = J - I_{g2} = \frac{70}{17} - 5 = -\frac{15}{17} = -0{,}8824\ \text{A} \tag{8}$$

ES. 5.8 - **Calcolare i potenziali di nodo del circuito seguente.**



$J = 3\,A$
$R_1 = 4\,\Omega \;\; R_2 = 10\,\Omega$
$\alpha = 4$

Indicando con V_A, V_B i potenziali dei nodi A e B si ha che

$$V_A = -v_1 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \alpha v_1 = -\alpha V_A \quad \Rightarrow \quad V_B = (1+\alpha) V_A .$$

Applicando il metodo dei potenziali nodali (modificato) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{V_A}{R_1} - i = J \\ \dfrac{V_B}{R_2} + i = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A}{R_1} + \frac{(1+\alpha)}{R_2} V_A = J \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{J}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{(1+\alpha)}{R_2}} = 4\,V$$

$V_B = (1+\alpha) V_A = 20\,V$.

Marco Gilli

Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino

Esercizi svolti di Elettrotecnica

Politecnico di Torino

TORINO

Maggio 2003

Esercizio 4.4

Dato il circuito di Fig. 4.4, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 1\,S$, $G_2 = 2\,S$, $G_3 = 4\,S$, $G_4 = 8\,S$, $E = 13\,V$ e $J = 1\,A$.

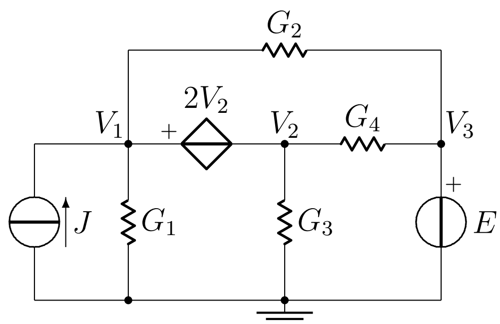


Figura 4.4: Circuito dell'esercizio 4.4

Soluzione

bisogna aggiungere al sistema l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione ed il valore di V_3 che è noto. Le equazioni del sistema sono:

$$
\begin{cases}
V_1G_1 + (V_1 - V_3)G_2 + V_2G_3 + (V_1 - V_3)G_4 = J \\
V_1 - V_2 = 2V_2 \\
V_3 = E
\end{cases}
$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$
\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_3 + G_4 & -G_2 - G_4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}
$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1\,S + 2\,S & 4\,S + 8\,S & -2\,S - 8\,S \\ \\ 1 & -3 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \\ V_2 \\ \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,A \\ \\ 0 \\ \\ 13\,V \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 \simeq 18.71\,V$$

$$V_2 \simeq \;\; 6.24\,V$$

$$V_3 = 13\,V$$

Esercizio 4.5

Dato il circuito di Fig. 4.5, trovare il valore di I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 8\,\Omega$ ed $E = 30\,V$.

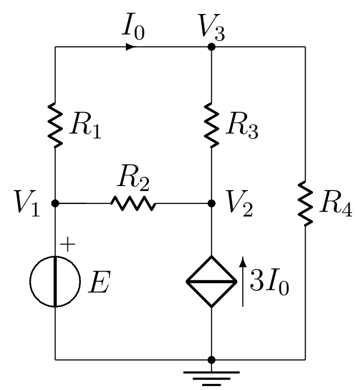


Figura 4.5: Circuito dell'esercizio 4.5

Soluzione

Alle equazioni dei nodi di V_1, V_2 e V_3 bisogna aggiungere l'equazione del generatore dipendente di corrente in funzione delle altre variabili:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_3}{R_1}$$

Il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & -3 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{10\,\Omega} & \dfrac{1}{10\,\Omega}+\dfrac{1}{2\,\Omega} & -\dfrac{1}{2\,\Omega} & -3 \\ -\dfrac{1}{4\,\Omega} & -\dfrac{1}{10\,\Omega} & \dfrac{1}{4\,\Omega}+\dfrac{1}{2\,\Omega}+\dfrac{1}{8\,\Omega} & 0 \\ -\dfrac{1}{4\,\Omega} & 0 & \dfrac{1}{4\,\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 = 30\,V$$

$$V_2 \simeq 37.16\,V$$

$$V_3 \simeq 12.82\,V$$

$$I_0 \simeq 4.925\,A$$

Esercizio 4.6

Dato il circuito di Fig. 4.6, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 8\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$, $E = 6\,V$ e $J = 3\,A$.

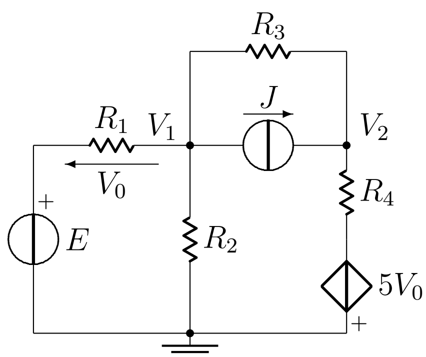


Figura 4.6: Circuito dell'esercizio 4.6

Soluzione

Scriviamo le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - E}{R_1} + \dfrac{V_1}{R_2} + \dfrac{V_1 - V_2}{R_3} + J = 0 \\[2ex] \dfrac{V_2 - V_1}{R_3} + \dfrac{V_2 + 5V_0}{R_4} - J = 0 \end{cases}$$

A queste due equazioni bisogna aggiungere l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione in funzione dei potenziali ai nodi:

$$V_0 = E - V_1$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} & -\dfrac{1}{R_3} & 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} & \dfrac{5}{R_4} \\[2ex] 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\[2ex] V_2 \\[2ex] V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{R_1} - J \\[2ex] J \\[2ex] E \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{1\,\Omega}+\frac{1}{4\,\Omega}+\frac{1}{8\,\Omega} & -\frac{1}{8\,\Omega} & 0 \\
-\frac{1}{8\,\Omega} & \frac{1}{8\,\Omega}+\frac{1}{1\,\Omega} & \frac{5}{1\,\Omega} \\
1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{6\,V}{1\,\Omega}-3\,A \\ 3\,A \\ 6\,V \end{bmatrix}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 0\,V \\
V_2 &= -24\,V \\
V_0 &= 6\,V
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.7

Dato il circuito di Fig. 4.7, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 2\,S$, $G_2 = 1\,S$, $G_3 = 4\,S$, $G_4 = 4\,S$, $G_5 = 1\,S$, $G_6 = 2\,S$, $J_1 = 4\,A$ e $J_2 = 8\,A$.

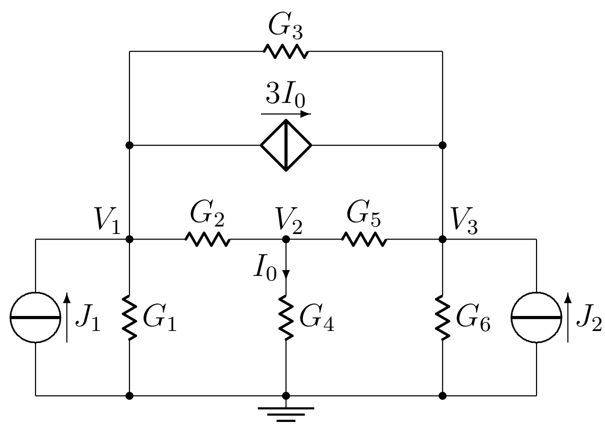


Figura 4.7: Circuito dell'esercizio 4.7

Soluzione

Considerando le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1, V_2 e V_3, e tenendo conto che la corrente che pilota il generatore dipendente vale

$$I_0 = V_2 G_4$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 & 3 \\ -G_2 & G_2+G_4+G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_3 & -G_5 & G_3+G_5+G_6 & -3 \\ 0 & G_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ J_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 2\,S+1\,S+4\,S & -1\,S & -4\,S & 3 \\ -1\,S & 1\,S+4\,S+1\,S & -1\,S & 0 \\ -4\,S & -1\,S & 4\,S+1\,S+2\,S & -3 \\ 0 & 4\,S & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,A \\ 0 \\ 8\,A \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} &V_1 = 1.25\,V \\ &V_2 = 0.75\,V \\ &V_3 = 3.25\,V \\ &I_0 = 3\,A \end{aligned}$$

Esercizio 4.8

Dato il circuito di Fig. 4.8, trovare i valori di V_0 ed I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_4 = 80\,\Omega$, $E_1 = 10\,V$ ed $E_2 = 12\,V$.

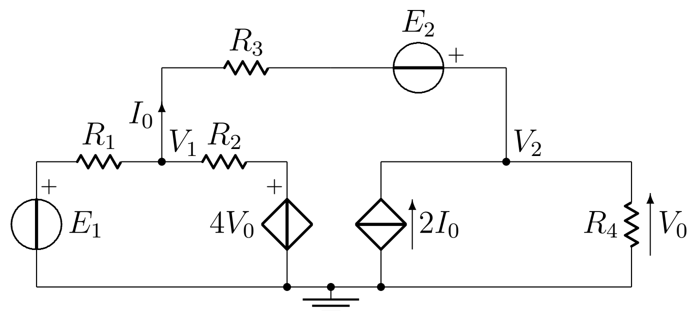


Figura 4.8: Circuito dell'esercizio 4.8

Soluzione

Si nota subito che

$$V_0 = V_2$$

Scriviamo quindi le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - E_1}{R_1} + \dfrac{V_1 - 4V_2}{R_2} + \dfrac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3} = 0 \\ \dfrac{V_2}{R_4} + \dfrac{V_2 - V_1 - E_2}{R_3} - 2I_0 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni sono 2 ma le incognite sono 3, bisogna perciò aggiungere un'altra equazione:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3}$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3} & -\dfrac{1}{R_3}-\dfrac{4}{R_2} & 0 \\ -\dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4} & -2 \\ -\dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{R_1}-\dfrac{E_2}{R_3} \\ \dfrac{E_2}{R_3} \\ \dfrac{E_2}{R_3} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{10\,\Omega}+\dfrac{1}{20\,\Omega}+\dfrac{1}{40\,\Omega} & -\dfrac{1}{40\,\Omega}-\dfrac{4}{20\,\Omega} & 0 \\ -\dfrac{1}{40\,\Omega} & \dfrac{1}{40\,\Omega}+\dfrac{1}{80\,\Omega} & -2 \\ -\dfrac{1}{40\,\Omega} & \dfrac{1}{40\,\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{10\,V}{10\,\Omega}-\dfrac{12\,V}{40\,\Omega} \\ \dfrac{12\,V}{40\,\Omega} \\ \dfrac{12\,V}{40\,\Omega} \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = -168.8\,V$$

$$V_2 = V_0 = -134.4\,V$$

$$I_0 = -0.56\,A$$

Esercizio 4.9

Dato il circuito di Fig. 4.9, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 2\,\Omega$, $E = 5\,V$ e $J = 1\,A$.

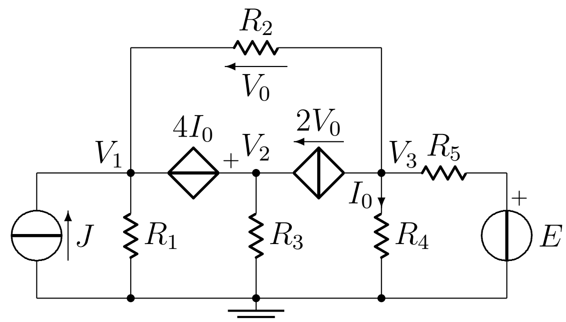
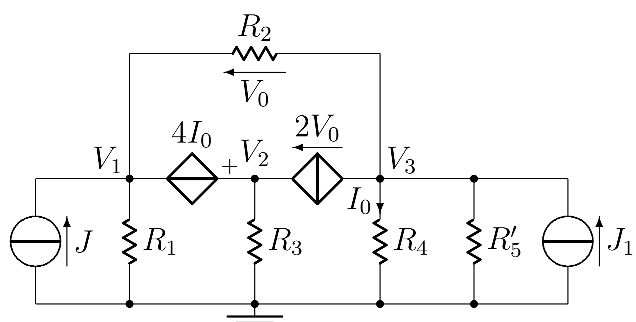


Figura 4.9: Circuito dell'esercizio 4.9

Soluzione

Come prima operazione conviene trasformare il ramo di destra nel suo equivalente Norton:



dove $J_1 = \dfrac{E}{R_5} = 2.5\,A$ ed $R_5' = R_5$

Considerando il ramo contenente il generatore dipendente di tensione ed aggiungendo le equazioni che legano le incognite V_0 ed I_0 alle tensioni nodali, si giunge al seguente sistema:

$$
\begin{cases}
\dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_3}{R_3} + \dfrac{V_2}{R_2} - 2V_0 - J = 0 \\[2ex]
\dfrac{V_3}{R_4} + \dfrac{V_3}{R_5'} + \dfrac{V_3 - V_1}{R_3} + 2V_0 - J_1 = 0 \\[2ex]
V_2 - V_1 = 4I_0 \\[2ex]
V_0 = V_1 - V_3 \\[2ex]
I_0 = \dfrac{V_3}{R_4}
\end{cases}
$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_3} & -2 & 0 \\[2ex]
-1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\[2ex]
-\dfrac{1}{R_3} & 0 & \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5'} & 2 & 0 \\[2ex]
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\[2ex]
0 & 0 & -\dfrac{1}{R_4} & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} J \\ 0 \\ J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{4\,\Omega} + \dfrac{1}{1\,\Omega} & \dfrac{1}{1\,\Omega} & -\dfrac{1}{1\,\Omega} & -2 & 0 \\[2ex]
-1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\[2ex]
-\dfrac{1}{1\,\Omega} & 0 & \dfrac{1}{1\,\Omega} + \dfrac{1}{4\,\Omega} + \dfrac{1}{2\,\Omega} & 2 & 0 \\[2ex]
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\[2ex]
0 & 0 & -\dfrac{1}{4\,\Omega} & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1\,A \\ 0 \\ 2.5\,A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

da cui

$$V_1 \simeq 2.545\,V$$

$$V_2 \simeq 2.727\,V$$

$$V_3 \simeq 0.182\,V$$

$$V_0 \simeq 2.364\,V$$

$$I_0 \simeq 45.45\,mA$$

Esercizi tratti dai temi d'esame dei corsi dei proff. Dario D'Amore, Lorenzo Codecasa, Paolo Maffezzoni, Sergio Guzzetti tenuti al Politecnico di Milano

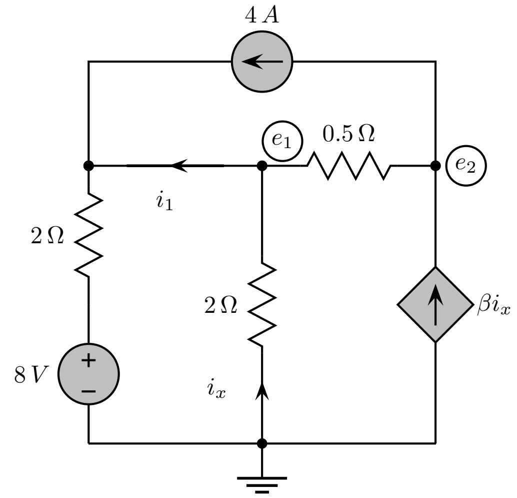
Nel caso vi fossero errori, refusi di stampa o precisazioni da fare negli esercizi o nelle soluzioni di questa raccolta, potete comunicarlo all'autore delle soluzioni all'indirizzo mail:

dino.ghilardi@ieee.org

1.5 E3(B), I P.I. del 6-5-2004, prof. D'Amore

1.5.1 Testo:

E3



$\beta = 2.$

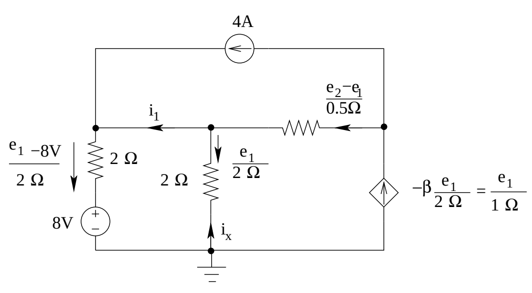
- Determinare i potenziali di nodo e_1 ed e_2 del circuito di figura utilizzando **esclusivamente** il metodo dell'analisi nodale.
- Determinare il valore della corrente i_1

1.5.2 Soluzione:

Per la soluzione dell'esercizio procederemo come segue:

- Punto 1: Utilizziamo il metodo dell'analisi nodale, in particolare
  - Esprimiamo le correnti di lato in funzione dei potenziali di nodo
  - Scriviamo le leggi di Kirchhoff ai nodi (metodo dell'analisi nodale)
  - Risolviamo il sistema ottenendo i potenziali di nodo.
- Punto 2: Noti i potenziali di nodo calcoliamo la corrente richiesta.

Punto 1: calcolo dei potenziali di nodo utilizzando il metodo dell'analisi nodale. Le correnti di lato sono espresse in funzione dei potenziali di nodo come nella figura seguente.



Scriviamo il sistema di equazioni dato dalle LKC ai nodi e_1 ed e_2.
Per il nodo 1 abbiamo:

$$4A - \frac{e_1 - 8V}{2\Omega} - \frac{e_1}{2\Omega} - \frac{e_1 - e_2}{0.5\Omega} = 0$$

e, riordinando i termini

$$e_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\right)+e_2\,(2)+4-(-4)=0$$

$$3e_1-2e_2-8=0$$

Per il nodo 2 otteniamo:

$$-4A+\frac{2}{1\Omega}\,(e_1-e_2)+\underbrace{\left(-\frac{e_1}{1\Omega}\right)}_{\beta i_x}=0$$

e, riordinando i termini:

$$e_1\,(2-1)+e_2\,(-2)-4=0$$

$$e_1-2e_2-4=0$$

Abbiamo quindi che il sistema completo per il metodo di analisi nodale sarà

$$\begin{cases} 3e_1-2e_2-8=0 \\ e_1-2e_2-4=0 \end{cases}$$

Risolvendolo si ottengono i due potenziali di nodo. Sottraendo membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$2e_1-4=0 \Rightarrow \boxed{e_1=2\,V}$$

Sostituendo il valore trovato nella seconda equazione

$$2V-2e_2-4=0 \Rightarrow 2e_2=-2V \Rightarrow \boxed{e_2=-1\,V}$$

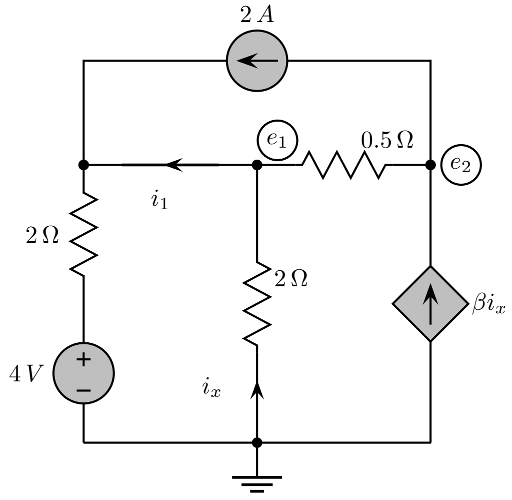
Punto 2: calcolo della corrente i_1. Ottenuti i potenziali di nodo e considerato che abbiamo già scritto le correnti di lato in funzione dei potenziali di nodo otteniamo (LKC al nodo all'estrema sinistra dello schema):

$$i_1=-4A+\frac{e_1-8V}{2\Omega}=-4A+\frac{2-8}{2}A=-4A-3A \Rightarrow \boxed{i_1=-7\,A}$$

1.6 E3(A) I P.I. del 6-5-2004, prof. D'Amore

1.6.1 Testo

E3



$\beta = 2.$

- Determinare i potenziali di nodo e_1 ed e_2 del circuito di figura utilizzando **esclusivamente** il metodo dell'analisi nodale.
- Determinare il valore della corrente i_1

1.6.2 Soluzione sintetica

- Nodo 1:

$$\left(\frac{e_1 - e_2}{0.5[\Omega]}\right) + \frac{e_1}{2[\Omega]} + \frac{e_1 - 4V}{2[\Omega]} - 2[A] = 0 \Rightarrow e_1\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{1[\Omega]} + -e\left(\frac{2}{1[\Omega]}\right) - 4[A] = 0$$

$$3e_1 - 2e_2 - 4\,[V] = 0$$

- Nodo 2:
La pilotante sarà: $i_x = -\frac{e_1}{2\Omega}$

$$\left(\frac{e_2 - e_1}{0.5[\Omega]}\right) + \underbrace{\frac{e_1}{1[\Omega]}}_{-(\beta i_x)} + 2[A] = 0 \Rightarrow e_1\left(\frac{-2+1}{1[\Omega]}\right) + \frac{2}{1[\Omega]}e_2 + 2[A] = 0$$

$$-e_1 + 2e_2 + 2\,[V] = 0$$

- Sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3e - 2e_2 - 4 = 0 \\ e_1 - 2e_2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow risolvendo \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} e_1 = 1\,V \\ e_2 = -0.5\,V \end{array}\right.}$$

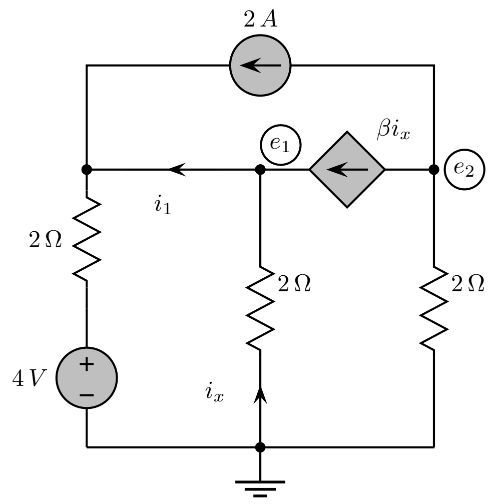
- Corrente i_1

$$\boxed{i_1 = -3.5\,A}$$

1.9 E3(D), T.E. del 06-05-2004, prof. D'Amore

1.9.1 Testo

E3

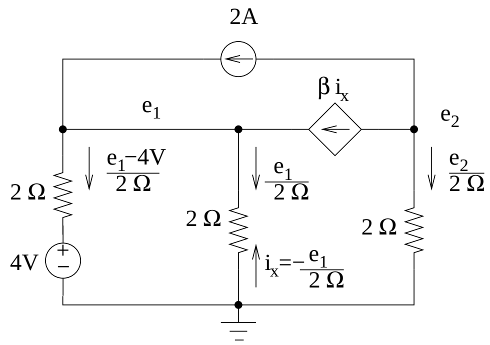


$\beta = 2$.

- Determinare i potenziali di nodo e_1 ed e_2 del circuito di figura utilizzando **esclusivamente** il metodo dell'analisi nodale.
- Determinare il valore della corrente i_1

1.9.2 Soluzione

Punto 1: Calcolo dei potenziali di nodo utilizzando l'analisi nodale. Innanzitutto si determinano le correnti di lato in funzione dei potenziali di nodo (si veda in figura).



A questo punto si scrivono le leggi di Kirchhoff ai nodi e_1 ed e_2.

$$nodo\, e1 \qquad 2A - \frac{e_1 - 4V}{2\Omega} - \frac{e_1}{2\Omega} + \underbrace{2}_{\beta}\left(-\frac{e_1}{2\Omega}\right) = 0$$

$$nodo\, e2 \qquad -2A - \underbrace{2}_{\beta}\left(-\frac{e_1}{2\Omega}\right) - \frac{e_2}{2\Omega} = 0$$

otteniamo quindi, riordinando le equazioni:

$$\begin{cases} -\frac{e_1}{2} - \frac{e_1}{2} - e_1 + 2A + 2A = 0 & nodo\, 1 \\ e_1 - \frac{e_2}{2\Omega} - 2A = 0 & nodo\, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e_1 = 4 & nodo\, 1 \\ e_1 - \frac{e_2}{2} = 2 & nodo\, 2 \end{cases}$$

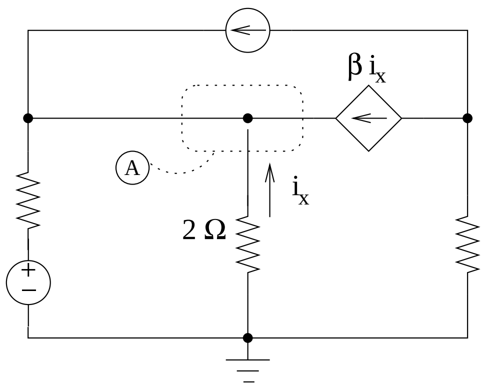
dalla prima equazione si ricava immediatamente

$$\boxed{e_1 = 2V}$$

Sostituendo nella seconda abbiamo

$$2 - \frac{e_2}{2} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{e_2 = 0}$$

Punto 2: Calcolo della corrente i_1. Con una LKC al taglio A otteniamo

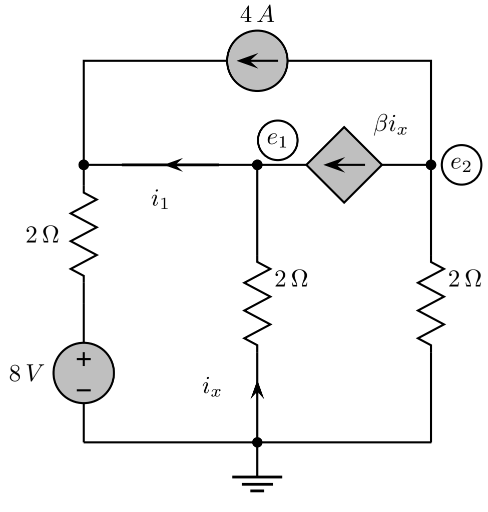


$$i_1 = \beta i_x + i_x = 3i_x = 3\left(-\frac{e_1}{2\Omega}\right) \Rightarrow \boxed{i_1 = -3\,A}$$

1.10 E3(C) T.E. del 06-05-2004, prof. D'Amore

1.10.1 Testo

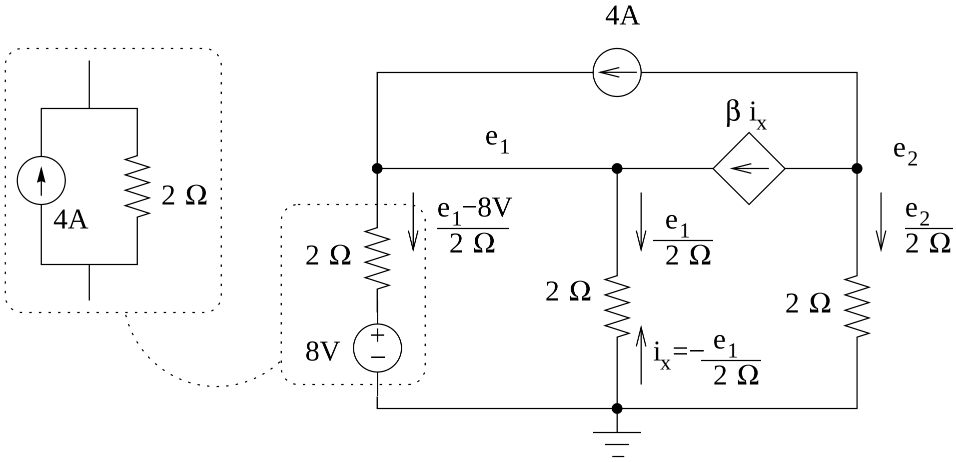
E3



$\beta = 2$.

- Determinare i potenziali di nodo e_1 ed e_2 del circuito di figura utilizzando **esclusivamente** il metodo dell'analisi nodale.
- Determinare il valore della corrente i_1

1.10.2 Soluzione sintetica



Punto 1: Calcolo dei potenziali di nodo con l'analisi nodale. Con il metodo per ispezione possiamo scrivere direttamente il sistema, compilando le matrici dei coefficienti un pezzo alla volta:

Iniziamo compilando i coefficienti dovuti alle correnti nei resistori[1]:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right) & -0 \\ -0 & \left(\frac{1}{2\Omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Aggiungiamo i coefficienti dovuti ai generatori impressivi[2]

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right) & -0 \\ -0 & \left(\frac{1}{2\Omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4A+4A \\ -4A \end{bmatrix}$$

Aggiungiamo i coefficienti dovuti al generatore pilotato[3].

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right) \underbrace{-2\left(-\frac{1}{2\Omega}\right)}_{gen.\,pilotato} & -0 \\ -0 + \underbrace{2\left(-\frac{1}{2\Omega}\right)}_{gen.\,pilotato} & \left(\frac{1}{2\Omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8A \\ -4A \end{bmatrix}$$

da cui

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{matrice\ A} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Risolvendo tale sistema otteniamo

[1] Si ricorda che, utilizzando come convenzione di segno per le LKC quella uscente dal nodo→ positiva si ottengono sulla diagonale principale (posizione i,i) le somme delle conduttanze afferenti al nodo i; fuori dalla diagonale principale (posizione i,j), l'opposto della conduttanza tra il nodo i ed il nodo j.

[2] Si ricorda che, se i termini noti vengono posti alla destra dell'uguale, si avrà che le correnti dei generatori compariranno con il loro segno se entranti nel nodo.

[3] Essendo le righe della matrice dei coefficienti i vari coefficiente nelle LKC ai nodi, è sufficiente esprimere la corrente del generatore pilotato in funzione dei potenziali di nodo per poterla inserire correttamente nella matrice. Nel nostro caso, essendo la pilotante $i_x = -\frac{e_1}{2\Omega}$, tale corrente è $\beta i_x = 2 \cdot \frac{e_1}{2\Omega}$ e quindi questo termine comparirà nella colonna di e_1. Il generatore pilotato è poi collegato tra i nodi 1 e 2, quindi rientrerà in entrambe le LKC (entrante nel nodo 1, quindi negativo ed uscente dal nodo 2, quindi positivo)

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{matrice\, A^{-1}} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 8-8 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} e_1 = 4\,V \\ e_2 = 0 \end{array}}$$

Si noti come per la soluzione della (1.2) si sarebbe ovviamente potuto utilizzare uno qualsiasi dei metodi noti dall'algebra lineare.

Punto 2: calcolo della corrente i_1. Con una LKC al nodo centrale otteniamo

$$i_1 = \beta i_x + i_x = 3 i_x = 3\left(-\frac{e_1}{2\Omega}\right) \Rightarrow \boxed{i_1 = 6\,A}$$